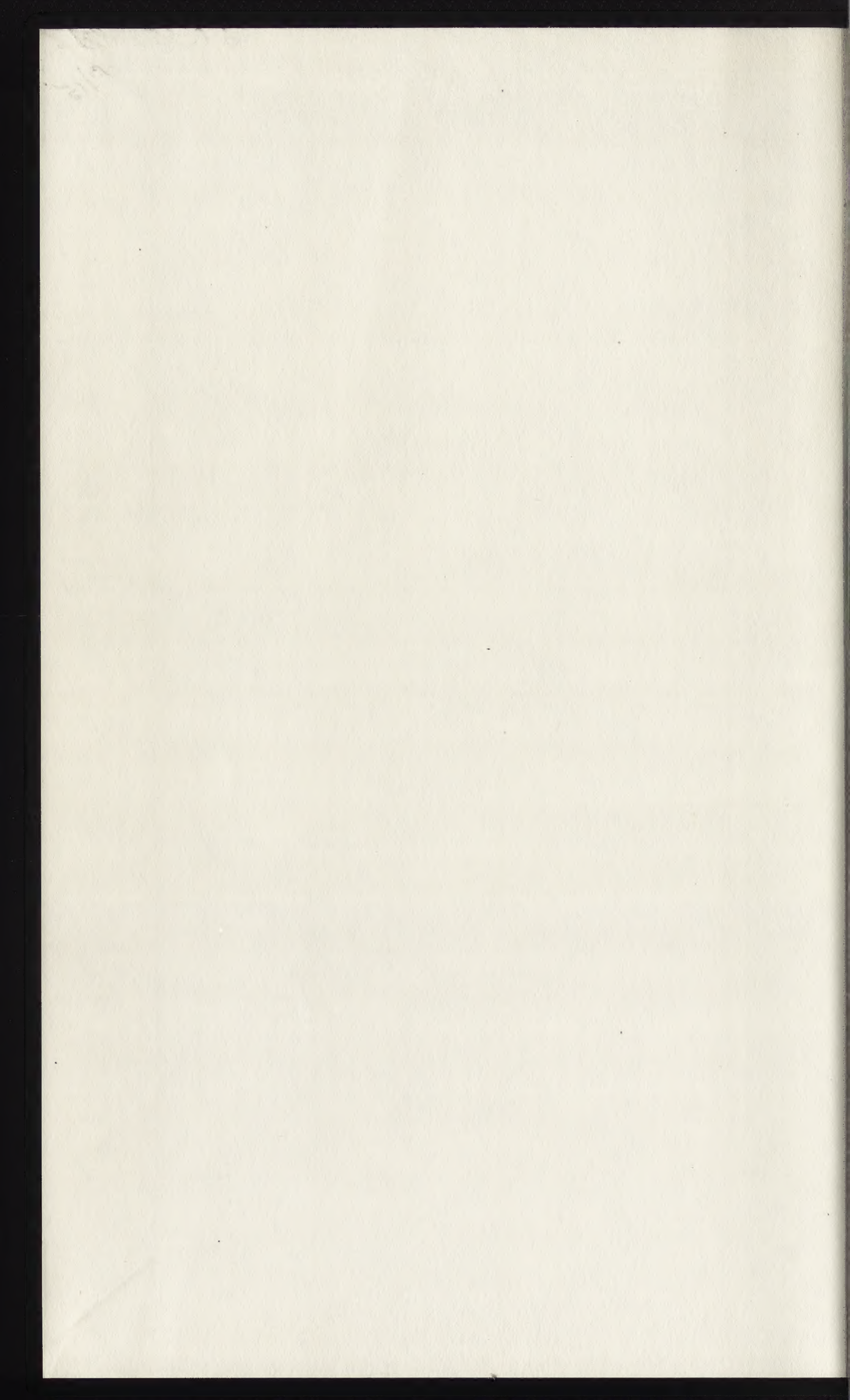




L. C. Nicolet.
6/23/15

CALCUL
DES POUTRES DROITES ET PLANCHERS
EN
BÉTON DE CIMENT ARMÉ

ANGERS, IMP. DE A. BURDIN, RUE GARNIER, 4.

CALCUL

DES

POUTRES DROITES ET PLANCHERS

EN

BÉTON DE CIMENT ARMÉ

PAR

L. LEFORT

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES

Extrait des **NOUVELLES ANNALES DE LA CONSTRUCTION**

PARIS

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, BAUDRY ET Cie, ÉDITEURS

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15

MAISON A LIÈGE, 21, RUE DE LA RÉGENCE

—

1899

PRÉFACE

Cet opuscule est la réunion d'articles successifs publiés dans les *Nouvelles Annales de la Construction.*

Il traite le sujet des poutres droites en béton de ciment armé et plus spécialement des poutres à armatures symétriques que nous démontrons être les plus économiques.

Nous avons surtout voulu donner une règle simple et pratique pour le calcul de ces poutres.

Le béton qui enrobe les armatures a pour rôle principal de maintenir invariablement la position de celles-ci. C'est le rôle de l'âme des poutres métalliques.

Par surcroît ce béton, qui, isolément, est incapable d'opposer la moindre résistance aux efforts de flexion, devient un auxiliaire sérieux du métal qu'il renferme quand il est appelé à travailler de concert avec lui.

Il en résulte que le métal déjà réparti à la distance maxima de la fibre neutre, c'est-à-dire placé dans la position la plus favorable, n'a plus à résister qu'à une *fraction* des efforts de flexion, le béton se chargeant de faire le reste de la besogne. Cette fraction a été désignée par le *coefficient* m.

Nous avions d'abord attribué au coefficient m la valeur 0,60. Mais au cours de la publication des articles et

par suite de la discussion approfondie des faits connus, nous avons pensé qu'il fallait agir avec prudence, laisser parler l'expérience encore bien incomplète, avant de fixer une valeur aussi faible et dans les formules définitives nous avons pris $m = 0,80$.

L'introduction de ce coefficient m permet de calculer les poutres droites en béton de ciment armé avec une très grande facilité.

Si nous avons réussi à jeter un rayon de lumière sur cette question nouvelle du béton armé, nous serons largement récompensé de notre étude.

L. L.

12 mars 1899.

CALCUL
DES POUTRES DROITES ET PLANCHERS
EN BÉTON DE CIMENT ARMÉ

CHAPITRE PREMIER

CALCULS BASÉS SUR LES FORMULES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Historique. — L'idée d'associer le fer à la maçonnerie pour résister à des efforts extérieurs date déjà de quelques années, mais elle a été appliquée pour la première fois sur une grande échelle par M. Hersent au port de Toulon dès 1876.

A cette époque, il proposa d'exécuter chacune des deux formes de radoub de Missiessy dans un grand et unique caisson en tôle de 144 *m* de longueur, 41 *m* de largeur et 19 *m* de hauteur, s'immergeant au fur et à mesure de l'exécution des maçonneries, jusqu'à venir s'échouer sur un sol préalablement dragué à 19 *m* en contrebas de la cote future du couronnement de l'ouvrage. Le fond de cet immense caisson n'était pas placé à la partie inférieure (comme le fond d'une caisse) parce que venant à reposer sur un sol inégal exécuté avec une drague, il se serait déformé et sans doute fissuré sous le poids des maçonneries comme, au siècle dernier, s'était déformé et fissuré le caisson semblable en bois que Groignard avait employé pour construire le bassin de radoub n° 1 de Vauban au même port de Toulon. Le fond du caisson de M. Hersent était relevé à 1,90 *m* des arêtes inférieures pour ménager des chambres de travail permettant de visiter le sol des fondations au moyen de l'air comprimé, de le débarrasser des vases accumulées pendant le dragage de la forme, d'opérer son nivellement et ensuite de remplir cette partie basse de la construction avec du béton posé à sec et convenablement damé et bourré.

Le rôle de ce caisson étanche était donc :

1° De permettre la construction à l'abri de l'eau de la totalité des maçonneries du bassin ;

2° De s'enfoncer jusqu'à l'échouage sous le poids croissant des maçonneries ;

3° De résister, pendant toute la période d'enfoncement particulièrement, *avec le concours des maçonneries,* aux efforts croissants des forces.

Dans sa partie basse et sur 7 *m* de hauteur, le caisson offrait comme éléments de résistance :

1° Une grande poutre de pourtour à double paroi de 7 *m* de hauteur ; la paroi extérieure était pleine et se confondait avec celle du caisson, la paroi extérieure était à claire-voie ;

2° Dix-sept poutres transversales ;

3° Deux poutres longitudinales intermédiaires.

Dans sa partie haute, sur 12 *m* de hauteur, il était complété par des rangs horizontaux de tôles minces placées successivement les unes au-dessus des autres au fur et à mesure de l'enfoncement et s'appuyant sur de grandes consoles verticales.

Ces éléments métalliques étaient loin de pouvoir résister seuls aux efforts et le constructeur comptait sur le large appui des maçonneries qui devaient les enchâsser. L'entreprise était hardie, puisque l'on proposait d'associer le travail de deux matières dans une construction présentant des dimensions inusitées.

Les Ingénieurs du port de Toulon, ayant à donner leur avis sur les propositions de M. Hersent, n'hésitèrent pas à appliquer à ces poutres hétérogènes les formules de la résistance des matériaux. Mais pour ce faire, il était indispensable de connaître le rapport entre le coefficient d'élasticité du fer et le coefficient d'élasticité des bétons et maçonneries. S'appuyant sur les résultats de quelques expériences connues à cette époque, ils adoptèrent le chiffre 20 pour ce rapport. Ce chiffre paraît être confirmé par des expériences récentes.

Les calculs montrèrent que chaque tranche du caisson tri-

butaire d'une poutre transversale offrait (fer et maçonneries associés) la stabilité nécessaire, bien qu'elle fût sollicitée par des forces extérieures engendrant les énormes moments fléchissants de 10 à 20 millions de kilogrammètres.

L'expérience confirma pleinement et les propositions de M. Hersent et les calculs de M. l'Ingénieur de Mazas.

C'est la plus gigantesque entreprise de maçonnerie armée (pour employer le terme actuel) qui ait été réalisée.

En ce moment même, M. Hersent construit au port de Toulon un troisième bassin de radoub à côté des deux précédents par les mêmes procédés et en suivant les mêmes méthodes. La longueur du caisson a été augmentée de 17 *m* et portée à 161 *m*, la largeur restant sensiblement la même. La réussite a été également complète.

Nous avons voulu citer ces exemples colossaux parce que la poutre hétérogène fer et béton a été employée depuis quelques années à des ouvrages beaucoup moins importants et notamment aux planchers, et que les constructeurs de ces planchers ne paraissent pas avoir eu connaissance des recherches faites avant eux par MM. Hersent et de Mazas au sujet du calcul de ces sortes de poutres, attendu qu'ils ont employé des méthodes de calculs empiriques nullement justifiées.

Notre but, dans ce chapitre, est d'appliquer aux poutres droites, en béton de ciment armé, les formules rigoureuses de la résistance des matériaux, suivant la marche adoptée au port de Toulon.

Nous diviserons le chapitre en plusieurs paragraphes pour passer en revue les différents cas qui ont été mis en usage par les constructeurs.

A. — *Cas général d'un fer à double* T *noyé dans un prisme droit en béton de ciment.*

Soit un prisme droit en béton de ciment dont la section droite a une largeur B et une hauteur H dans lequel se trouve enchâssé un fer à double T (fig. 1).

Le plan diamétral vertical du prisme en béton et celui du fer à double T se confondent.

Le plan diamétral horizontal du prisme en béton est placé à la distance $\frac{H}{2}$ de la face supérieure de ce prisme. Le plan diamétral horizontal du fer est placé à la distance d de cette même face.

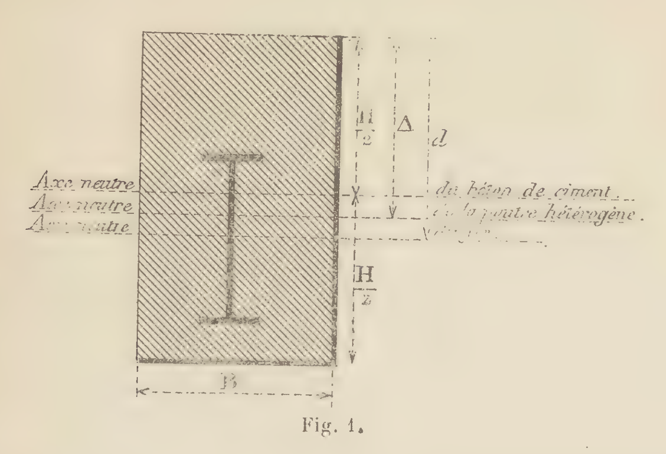


Fig. 1.

Position de la fibre neutre. — Pour étudier l'action des forces sur une telle poutre, il convient d'abord de déterminer la position de la fibre neutre qui ne change pas de longueur pendant la déformation.

Si le béton existait seul, cette fibre serait à la distance $\frac{H}{2}$ du plan supérieur de la poutre et se confondrait dans chaque section verticale avec la trace du plan diamétral horizontal dans cette section.

Si le fer existait seul, cette fibre serait placée à la distance d du plan supérieur de la poutre hétérogène et se confondrait dans chaque section verticale avec la trace du plan diamétral horizontal du fer.

La combinaison des deux matières donne naissance à une fibre neutre située entre les deux précédentes et qui s'obtient

en donnant à chaque matière une densité proportionnelle à son coefficient d'élasticité.

Soient dès lors :

2 S la surface de la section du fer,
BH la surface du béton,
E le coefficient d'élasticité du fer,
E' le coefficient d'élasticité du béton.

Pour simplifier les écritures prenons comme unité de mesure des coefficients d'élasticité celui du béton, posons

$$\frac{E}{E'} = K.$$

K sera la mesure du coefficient d'élasticité du fer, celui du béton étant pris comme unité et représenté par 1.

La surface hétérogène fer et béton, ces matières étant considérées comme ayant des densités proportionnelles à leurs coefficients d'élasticité, aura pour expression :

$$\Omega = 2\,KS + B.H \qquad (1)$$

Ω étant supposé avoir la densité 1, celle du béton.

Le centre de gravité de cette surface hétérogène, pris par rapport à la face supérieure du béton, les matières étant considérées comme ayant des densités proportionnelles à leurs coefficients d'élasticité, sera placé à la distance

$$\Delta = \frac{2\,KS\,d + \frac{BH^2}{2}}{2\,KS + BH}$$

$$\Delta = \frac{H}{2} + \frac{KS\,(2d - H)}{BH + 2\,KS} \qquad (2)$$

Obtenue dans les conditions précédentes, cette distance Δ représente aussi celle à laquelle se trouve placée la fibre neutre de la poutre hétérogène.

Moments d'inertie partiels. — Soient : I le moment d'inertie du fer par rapport à son axe neutre propre;

I' le moment d'inertie du béton par rapport à son axe neutre propre.

La flexion s'effectuant autour de l'axe neutre de la poutre hétérogène placé à la distance Δ du plan supérieur, les moments

d'inertie I et I' s'augmenteront, d'après un théorème connu, respectivement de l'aire de la surface des sections multipliée par le carré de la distance qui sépare le centre de gravité de chaque section du centre de gravité de la poutre hétérogène.

Soient L et L' les nouvelles valeurs des moments d'inertie pris par rapport au centre de gravité de la poutre hétérogène, on a :

$$L = I + 2S\,(d - \Delta)^2 \qquad (3)$$

$$L' = I' + BH\left(\Delta - \frac{H}{2}\right)^2 \qquad (4)$$

Efforts développés dans la poutre hétérogène par le moment fléchissant. — Cherchons à présent les efforts développés dans chacune des matières composant la poutre hétérogène sous l'influence des forces extérieures.

Soient : M, le moment fléchissant développé par la force extérieure dans une section donnée de la poutre.

ρ, le rayon de courbure de l'axe neutre déformé;

v, la distance de l'axe d'élasticité de la poudre hétérogène à une fibre du métal;

v', la distance de même nature, en ce qui concerne le béton;

R, l'effort par unité de surface développé dans le métal ;

R', l'effort semblable dans le béton.

La superposition des effets des forces donne l'égalité

$$\frac{E.L}{\rho} + \frac{E'L'}{\rho} = M \qquad (5)$$

On a aussi pour chacune des deux substances

$$\frac{R}{v} = \frac{E}{\rho} \qquad (6)$$

$$\frac{R'}{v'} = \frac{E'}{\rho} \qquad (7)$$

On a posé plus haut

$$\frac{E}{E'} = K \qquad (8)$$

Des équations (5), (6) et (7) on tire facilement

$$\frac{RL}{v} + \frac{R'L'}{v'} = M \qquad (9)$$

En divisant (6) par (7) et tenant compte de (8), on obtient

$$\frac{R}{v} = K \cdot \frac{R'}{v'} \qquad (10)$$

Si l'on substitue la valeur de $\frac{R'}{v'}$ tirée de l'équation (10) dans l'équation (9), il vient

$$\frac{R}{v} . L + \frac{R}{v.K} L' = M$$

$$R = \frac{K.Mv}{KL + L'} \qquad (11)$$

Si l'on substitue la valeur de R tirée de l'équation (10) dans l'équation (9), il vient

$$\frac{R'}{v'} . K.L + \frac{R'}{v'} . L' = M$$

d'où

$$R' = \frac{M.v'}{KL + L'} \qquad (12)$$

Les équations (11) et (12) sont de la même forme que l'équation générale connue des poutres homogènes $\left(R = \frac{Mv}{I}\right)$ et s'obtiennent de cette dernière :

1° En remplaçant le dénominateur par la somme des moments d'inertie des deux matières pris par rapport au centre de gravité de la poutre hétérogène et multipliés respectivement par le coefficient d'élasticité propre à chaque matière.

2° En multipliant le numérateur par le coefficient d'élasticité propre à chaque matière.

En attribuant à v et à v' la plus grande valeur absolue qu'ils puissent avoir, on trouvera pour R et R' les plus grandes charges auxquelles les matières sont soumises dans la section considérée.

Moment d'inertie total de la poutre hétérogène. — L'expression KL + L' est appelée *moment d'inertie total* de la poutre hétérogène pris par rapport à son centre d'élasticité.

Les formules (11) et (12) montrent que les efforts par unité de surface dans chaque matière sont inversement proportion-

nels à ce moment d'inertie total et sont minimum quand ce dernier est maximum.

Cas particulier. — Si le centre de gravité du fer coïncide avec celui du béton, les formules qui précèdent se simplifient.

Tout d'abord l'hypothèse donne $d = \frac{H}{2}$, ce qui entraîne dans la formule (2) $\Delta = d = \frac{H}{2}$. La fibre neutre de la poutre hétérogène coïncide avec les fibres neutres de chacune des deux matières.

Mais on a aussi $d - \Delta = 0$ et $\Delta - \frac{H}{2} = 0$, ce qui conduit à

$$L = I$$
$$L' = I'$$

Enfin, les équations (11) et (12) deviennent

$$R = \frac{K\,M.v}{KI + I'} \qquad (13)$$

$$R' = \frac{Mv'}{KI' + I'} \qquad (14)$$

Efforts développés dans la poutre hétérogène par l'effort tranchant. — L'effort tranchant A, dans une section considérée, se décompose ainsi pour chaque matière :
pour le métal

$$\frac{A}{\Omega} \times 2KS$$

pour le béton

$$\frac{A}{\Omega} \times BH$$

et donne par unité de surface un effort
dans le fer de

$$\frac{A}{\Omega} \times K$$

dans le ciment de

$$\frac{A}{\Omega}\cdot$$

Ces efforts s'ajoutent à ceux qui sont dus au moment fléchissant et doivent entrer en ligne de compte dans les calculs.

B. — *Cas de barres rondes métalliques d'égal diamètre noyées dans un prisme droit en béton de ciment.*

Barres placées d'un seul côté et à la même distance du plan diamétral horizontal du prisme. — L'idée de noyer des barres rondes métalliques dans le béton de ciment s'est fait jour avec la construction des planchers. Les formules précédentes s'appliquent immédiatement à ce cas.

Soient : r, le rayon des barres;

n, leur nombre ;

$\frac{h}{2}$, la distance de leur axe un plan diamétral horizontal de la poutre (fig. 2) ;

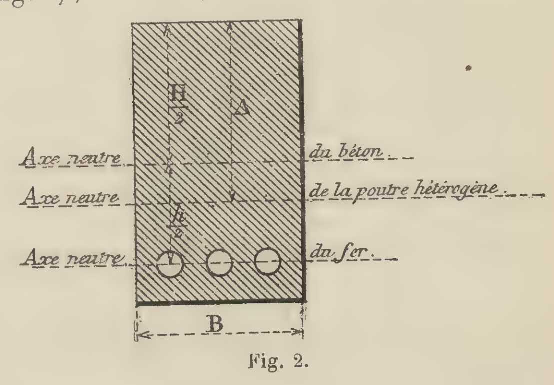


Fig. 2.

En reprenant les formules précédentes, on a successivement en remarquant que :

$$2\,S = n\pi r^2 \quad \text{et} \quad d = \frac{h + H}{2},$$

$$\Omega = Kn\,\pi r^2 + BH$$

$$\Delta = \frac{H}{2} + \frac{Kn\,\pi r^2 \frac{h}{2}}{BH + Kn\,\pi r^2}$$

$$I = n\,\pi r^2 \times \frac{r^2}{4}$$

$$I' = \frac{BH^3}{12}$$

$$L = n\,\pi r^2 \times \frac{r^2}{4} + n\,\pi r^2 \left(\frac{h + H}{2} - \Delta\right)^2$$

$$= n\,\pi r^2 \left[\frac{r^2}{4} + \left(\frac{h + H}{2} - \Delta\right)^2\right]$$

$$L' = \frac{BH^3}{12} + BH\left(\Delta - \frac{H}{2}\right)^2$$

$$R = \frac{K\,M.\,v}{Kn\,\pi r^2\left[\frac{r^2}{4} + \left(\frac{h+H}{2} - \Delta\right)^2\right] + \frac{BH^3}{12} + BH\left(\Delta - \frac{H}{2}\right)^2}$$

$$R' = \frac{Mv'}{Kn\pi r^2\left[\frac{r^2}{4} + \left(\frac{h+H}{2} - \Delta\right)^2\right] + \frac{BH^3}{12} + BH\left(\Delta - \frac{H}{2}\right)^2}$$

Pour avoir le maximum de R et de R′, il faut remplacer respectivement :

$$v \text{ par } \frac{H + h}{2} - \Delta + r$$

et

$$v' \quad \text{par} \quad \Delta.$$

Les valeurs de R et R′ sont données en outre avec leur signe par l'introduction dans les formules du signe de M dans la section considérée. Il y a lieu de bien discuter dans chaque cas le sens du moment pour reconnaître si elles répondent à une tension ou à une compression.

Barres placées d'un même côté du plan diamétral sur deux rangs horizontaux. — Supposons le cas de deux rangées de barres placées du même côté du plan diamétral (fig. 3).

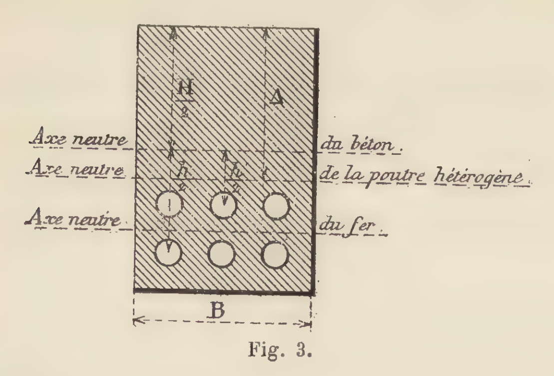


Fig. 3.

Conservons les mêmes notations que précédemment et y ajoutons :

n (le même) nombre des barres de la deuxième rangée,

r (le même) leur rayon;

$\frac{h'}{2}$ leur distance au plan diamétral.

Il est facile, en reprenant les formules générales, de trouver celles qui s'appliquent à ce cas.

$$\Omega = 2K\pi r^2 n + BH$$

$$\Delta = \frac{H}{2} + \frac{K\pi r^2 n (h + h')}{BH + 2K\pi r^2 n}$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4} 2n + 2\pi n r^2 \left(\frac{h - h'}{4}\right)^2$$

$$= 2n\pi r^2 \left[\frac{r^2}{4} + \left(\frac{h - h'}{4}\right)^2\right]$$

$$I' = \frac{BH^3}{12}$$

$$L = 2n\pi r^2 \left[\frac{r^2}{4} + \left(\frac{h - h'}{4}\right)^2\right] + 2n\pi r^2 \left[\frac{h + h'}{4} - \left(\Delta - \frac{H}{2}\right)^2\right]$$

$$L' = \frac{BH^3}{12} + BH\left(\Delta - \frac{H}{2}\right)^2$$

On trouverait facilement les valeurs de R et de R′ comme ci-dessus. La complication des écritures nous empêche seule de les écrire.

Barres placées de part et d'autre, mais à la même distance du plan diamétral. — Soient : n barres placées au-dessous;

n' barres placées au-dessus;

$\frac{h}{2}$ la distance au plan diamétral (fig. 4);

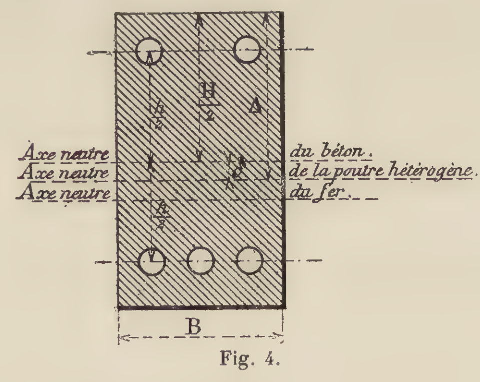


Fig. 4.

r le rayon commun des barres.

L'application des formules générales donne successivement

$$\Omega = K\pi r^2 (n + n') + BH$$

$$\Delta = \frac{K\pi r^2 \left[n \left(\frac{H + h}{2} \right) + n' \left(\frac{H - h}{2} \right) \right] + \frac{BH^2}{2}}{K (n + n') \pi r^2 + BH}$$

$$I = (n + n') \pi \frac{r^4}{4}$$

$$I' = \frac{1}{12} BH^3$$

$$L = (n + n') \pi \frac{r^4}{4} + n\pi r^2 \left(\frac{H + h}{2} - \Delta \right)^2 + n' \pi r^2 \left(\Delta - \frac{H - h}{2} \right)^2$$

$$= (n + n') \pi \frac{r^4}{4} + \pi r^2 \left[n \left(\frac{H + h}{2} - \Delta \right)^2 + n' \left(\Delta - \frac{H - h}{2} \right)^2 \right]$$

$$L' = BH \left[\frac{H^2}{12} + \left(\Delta - \frac{H}{2} \right)^2 \right]$$

Comme précédemment, par l'application des formules générales, on trouverait facilement les valeurs de R et de R'.

Ces exemples suffisent à permettre le calcul de toutes les combinaisons de barres noyées dans du béton.

Nous allons maintenant chercher parmi ces combinaisons, celle qui donne un moment total d'inertie maximum.

C. — *Recherche de la disposition à donner aux barres pour rendre maximum le moment d'inertie de la poutre hétérogène.*

Nous reprendrons le cas précédent qui est un cas général puisque dans la pratique les barres, quand on en fait deux séries ou armatures, se placent à la même distance du plan diamétral.

Formons l'expression du moment d'inertie total de la poutre hétérogène et désignons-la par λ

$$\lambda = KL + L'$$

Remplaçons L et L' par leurs valeurs trouvées dans le dernier exemple qui précède, on a

$$\lambda = K\pi r^2 \left[(n + n') \frac{r^2}{4} + n \left(\frac{H + h}{2} - \Delta \right)^2 + n' \left(\Delta - \frac{H - h}{2} \right)^2 \right]$$
$$+ BH \left[\frac{H^2}{12} + \left(\Delta - \frac{H}{2} \right)^2 \right]$$

Posons pour la facilité des recherches

$$n + n' = N$$

et $$\delta = \Delta - \frac{H}{2}$$

Eliminons n' et Δ des trois équations précédentes, il vient

$$\lambda = K\pi r^2 \left[N \frac{r^2}{4} + n \left(\frac{H+h}{2} - \frac{2\delta + H}{2} \right) + (N - n) \left(\frac{2\delta + H}{2} - \frac{H-h}{2} \right)^2 \right] + BH \left[\frac{H^2}{12} + \delta^2 \right]$$

$$\lambda = K\pi r^2 \left[N \frac{r^2}{4} + n \left(\frac{h - 2\delta}{2} \right)^2 + (N - n) \left(\frac{2\delta + h}{2} \right)^2 \right] + BH \left(\frac{H^2}{12} + \delta^2 \right)$$

$$\lambda = K\pi r^2 \left[N \frac{r^2}{4} + \left(\frac{2\delta + h}{2} \right)^2 N \right] + BH \left(\frac{H^2}{12} + \delta^2 \right) - 2nh\delta\, K\pi r^2$$

$$\lambda = \delta^2 (BH + K\pi r^2 N) + K\pi r^2 h (N - 2n)\delta + \frac{BH^3}{12} + \frac{KN\pi r^4}{4} + K\pi r^2 N \frac{h^2}{4} \quad (15)$$

D'autre part

$$\delta = \Delta - \frac{H}{2}$$

$$\text{ou } \delta = \frac{K\pi r^2 \left[n \frac{H+h}{2} + (N - n) \frac{H-h}{2} \right] + \frac{BH^2}{2} - KN\pi r^2 \frac{H}{2} - \frac{BH^2}{2}}{KN\pi r^2 + BH}$$

$$\delta = \frac{K\pi r^2 \left[nh + N \frac{H-h}{2} \right] - K\pi r^2 \frac{N.H}{2}}{BH + KN\pi r^2}$$

$$\delta = \frac{K\pi r^2 \frac{h}{2} (2n - N)}{BH + KN\pi r^2} \quad (16)$$

Dérivée de λ. — Puisque nous cherchons quelle valeur il faut prendre pour n, quand on se donne N, pour rendre λ maximum, il y a lieu de prendre la dérivée de λ par rapport à n et de l'égaler à zéro.

Toutefois, comme δ est une fonction de n, il convient de tenir compte de ce fait et aussi de ce que

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{2K\pi r^2 \frac{h}{2}}{BH + KN\pi r^2}$$

Formons $\frac{d\lambda}{dn}$

$$\frac{d\lambda}{dn} = 2\delta \frac{d\delta}{dn} (BH + K\pi r^2 N) + 2K\pi r^2 \frac{h}{2} \left[(N - 2n) \frac{d\delta}{dn} - 2\delta \right].$$

$$= \frac{4\left(K\pi r^2 \frac{h}{2}\right)^2 (2n - N)}{BH + KN\pi r^2} + 2K\pi r^2 \frac{h}{2}\left[\frac{2K\pi r^2 \frac{h}{2}(N - 2n) - 2K\pi r^2 \frac{h}{2}(2n - N)}{BH + KN\pi r^2}\right]$$

$$= \frac{4\left(K\pi r^2 \frac{h}{2}\right)^2}{BH + KN\pi r^2}(2n - N + 2N - 4n)$$

$$\frac{d\lambda}{dn} = \frac{K\pi r^2 h\,(N - 2\,n)}{BH + K\pi r^2}$$

Valeur de n *qui rend* λ *maximum.* — Cette dérivée de λ s'annule pour $N = 2n$ ou $n = \frac{N}{2}$, c'est-à-dire quand il y a autant de barres en haut qu'en bas.

Ce résultat est d'autant plus remarquable qu'il est indépendant du rapport K des coefficients d'élasticité des matières qui composent la poutre hétérogène.

Il s'agit bien d'un maximum absolu de λ. En effet, quand n croît de zéro à $\frac{N}{2}$, $\frac{d\lambda}{dn}$ est positif, c'est-à-dire que λ croît constamment; quand n continue à croître de $\frac{N}{2}$ à N, $\frac{d\lambda}{dn}$ est négatif et la fonction λ décroît.

Valeurs de n *qui rendent* λ *minimum.* — Il y a lieu de remarquer en outre que les variations de $\frac{d\lambda}{dn}$ étant égales et de signe contraire quand n partant de $\frac{N}{2}$ décroît jusqu'à zéro ou croît jusqu'à N, les minima de la fonction λ ont lieu, dans la limite des valeurs que peut prendre la variable, pour $n = o$ et $n = N$ et sont égaux.

On en conclut donc cette importante conséquence :

La poutre hétérogène avec barres métalliques rondes d'égal diamètre noyées dans le béton présente :

1° Son maximum de moment d'inertie et par suite son maximum de résistance quand les barres sont disposées symétriquement par rapport au plan diamétral horizontal de la poutre droite.

2° Son minimum de moment d'inertie ou de résistance quand les barres sont placées du même côté du plan diamétral.

Rapport entre le minimum et le maximum de λ. — Il est intéressant de connaître le rapport qui existe entre le minimum et le maximum de λ.

Des formules (15) et (16), en faisant successivement $n = \frac{N}{2}$ et $n = N$, on obtient

$$\lambda \text{ max.} = \frac{BH^3}{12} + \frac{KN\pi r^2}{4}(r^2 + h^2)$$

$$\lambda \text{ min.} = \lambda \text{ max.} - \frac{1}{4}\frac{(KN\pi r^2 h)^2}{BH + KN\pi r^2}$$

Posons $BH = \Omega$, $N\pi r^2 = 2S$ et négligeons le terme en r^2 dans l'expression $r^2 + h^2$ ce qui est sans inconvénient puisque dans la pratique $r^2 = \frac{h^2}{400}$ environ.

On obtient ainsi :

$$\lambda \text{ max.} = \Omega \frac{H^2}{12} + \frac{KSh^2}{2}$$

$$\lambda \text{ min.} = \lambda \text{ max.} - \frac{K^2S^2h^2}{\Omega + 2KS}$$

Calculons le rapport

$$\frac{\lambda \text{ max.} - \lambda \text{ min.}}{\lambda \text{ max.}} = \frac{\frac{K^2S^2h^2}{\Omega + 2KS}}{\Omega \frac{H^2}{12} + \frac{KSh^2}{2}}$$

Il est nécessaire de donner aux lettres des valeurs qui sont voisines de celles de la pratique. Par suite, on posera d'abord

$$K = 20 \quad \text{et} \quad \Omega = 50\,S$$

Après simplifications, le rapport précédent devient

$$\frac{16\,h^2}{15\,H^2 + 36\,h^2}$$

D'autre part, H varie entre $1,10h$ et $1,40\,h$.

Pour $H = 1,10\,h$, le rapport devient 0,30

$H = 1,40\,h$, — 0,24

On conclut que le minimum est compris entre les 70 0/0 et les 76 0/0 du maximum.

Si l'on avait pris $\Omega = 75$ S, ce qui se rencontre encore dans la pratique, on aurait trouvé que le minimum est compris entre les 80 0/0 et les 84 0/0 du maximum.

D. — *Cas des poutres à armatures symétriques.*

Formules générales. — Puisque la symétrie des armatures est favorable à la résistance, il est intéressant de donner les formules spéciales à ce cas.

Dans les formules du § C, nous ferons $n = \frac{N}{2}$.

L'équation (16) donne d'abord $\delta = o$.

Ce qui signifie que l'axe neutre de la poutre hétérogène coïncide avec celui des armatures et avec celui du prisme en béton.

L'équation (15) se réduit à

$$\lambda = \frac{BH^3}{12} + KN\frac{\pi r^4}{4} + KN\pi r^2 \frac{h^2}{4}$$

ou

$$\lambda = \frac{BH^3}{12} + \frac{KN\pi r^2}{4}(r^2 + h^2) \qquad (17)$$

On aurait pu écrire directement cette équation sous sa première forme, car le premier terme exprime le moment d'inertie propre du béton, les second et troisième termes le moment d'inertie des armatures pris par rapport au centre de gravité de la poutre.

A cette équation (17) viennent s'ajouter deux autres équations analogues aux équations (11) et (12) quand on donne à v et v' leurs plus grandes valeurs.

$$R = \frac{M.K\left(\frac{h}{2} + r\right)}{\lambda} \qquad (18)$$

$$R' = \frac{M\frac{H}{2}}{\lambda} \qquad (19)$$

Cas où le diamètre des fers est petit par rapport à la distance

verticale des armatures. — Il arrive en général, dans la pratique, que $\frac{r}{\frac{h}{2}}$ est voisin de $\frac{1}{10}$. Dans ce cas, r^2 n'est guère que le 1/100e de $\frac{h^2}{4}$ et r^2 n'est guère que la 400e partie de h^2. Dès lors, on peut sans grande erreur, dans l'équation (17), faire abstraction de r^2 dans l'expression $(r^2 + h^2)$ et écrire

$$\lambda = \frac{BH^3}{12} + \frac{KN\,\pi r^2 h^2}{4}$$

Enfin, si l'on remarque que $N\pi r^2$ représente la section totale 2S des armatures, on peut poser

$$\lambda = \frac{BH^3}{12} + \frac{KSh^2}{2} \qquad (20)$$

Nous voici arrivés au terme de notre étude théorique avec les trois formules (18), (19) et (20) qui permettent de calculer tous les éléments des poutres à armature symétrique.

Valeurs pratiques des coefficients R, R' et K. — Malheureusement, dans ces formules, subsistent deux quantités que les expériences trop peu nombreuses n'ont pas permis de fixer encore d'une façon définitive, savoir :

Le coefficient K qui exprime le rapport entre les coefficients d'élasticité du métal et du béton;

Le coefficient R' qui exprime la résistance pratique du béton, tant à la compression qu'à la tension.

Si le coefficient d'élasticité E du métal est à peu près certain et égal à 2×10^{10}, valeur généralement reconnue, il n'en est pas de même de celui du béton de ciment dont la valeur varie d'ailleurs avec la nature du sable, la nature et le dosage du mortier de ciment et au sujet duquel se sont élevées de grandes discussions qui n'ont pu aboutir à une conclusion définitive.

De sorte qu'il reste à chacun le soin de déterminer le coefficient K par des expériences directes en se servant des maté-

riaux dont il dispose et en admettant le dosage qu'il veut employer.

Toutefois, des expériences rapportées dans le journal *Le Ciment,* du 15 octobre 1897, par M. de Tedesco et faites sur des poutres à barres ou armatures symétriques en béton de ciment dosé à 500 *kg* de ciment par mètre cube de sable, et dont il sera rendu compte plus loin, il ressort que, dans les limites habituelles que l'on assigne au travail du fer, le coefficient d'élasticité de cette matière étant supposé égal à 2×10^{10},

K oscille autour d'une moyenne de 19, tout en variant de 13 à 26, du simple au double, circonstance qui laisse planer quelque incertitude sur la valeur ou plutôt sur la marche variable de ce coefficient quand le prisme en béton est soumis à des charges croissantes;

R′ travail moyen du ciment par centimètre carré, tant à la compression qu'à la tension, est égal à 56 *kg*.

E. — *Formule abrégée des poutres à armatures symétriques.*

Le coefficient m. — Ces expériences ont en outre révélé que dans les limites habituelles du travail du métal, les deux matières associées se partagent de la façon suivante l'effort de résistance opposé en commun au moment fléchissant M des forces extérieures :

Le béton prend une part évaluée au moins à 40 0/0;

Le fer prend pour son compte au plus 60 0/0.

Dès lors, pour éviter l'introduction dans les formules, non seulement du coefficient E′ qui est encore si incertain, mais même du coefficient E, on peut, dans les formules (18), (19) et (20) négliger les termes correspondants à la présence du béton et remplacer M par *m*. M;

m, étant pris égal à 0,60.

Il vient

$$\lambda = \frac{KSh^2}{2}.$$

et

$$R = \frac{mMK\left(\frac{h}{2}+r\right)}{\frac{KSh^2}{2}}$$

ou

$$\frac{RSh^2}{2} = mM\left(\frac{h}{2}+r\right) \qquad (21)$$

Cette formule n'est vraie que quand le béton qui enveloppe le fer a une section se rapprochant de celle des expériences, c'est-à-dire égale à 25 fois au moins celle du fer.

1er *cas particulier.* — Quand le rayon des barres est faible par rapport à h, ou encore si l'on ne veut envisager que *l'effort moyen du fer*, on peut écrire

$$\frac{RSh^2}{2} = mM\,\frac{h}{2}$$

$$RSh = mM. \qquad (22)$$

L'application de la formule (22) donne pour la section des armatures 2S une valeur moindre que celle qui est donnée par la formule (21).

De la formule (21), on tire en effet

$$S_{21} = \frac{mM}{R}\cdot\frac{\frac{h}{2}+r}{\frac{h^2}{2}} = \frac{mM}{R}\left(\frac{1}{h}+\frac{2r}{h^2}\right)$$

Tandis que de la formule (22) on extrait

$$S_{22} = \frac{mM}{R}\cdot\frac{1}{h}$$

valeur évidemment plus faible que la précédente.

L'erreur relative commise en prenant la formule (22) est donc

$$\frac{S_{21}-S_{22}}{S_{21}} = \frac{\frac{2r}{h^2}}{\frac{1}{h}+\frac{2r}{h^2}} = \frac{2r}{h+2r} = \frac{2r}{h} - \frac{4r^2}{h^2} + \frac{8r^3}{h^3} - \dots$$

Si, comme précédemment, on suppose $\frac{r}{\frac{h}{2}}$ voisin de $\frac{1}{10}$,

comme cela se passe habituellement, l'erreur relative est

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \ldots$$

C'est-à-dire voisine de $1/10^e$.

Ainsi, la valeur du *travail moyen* du fer dans les barres est habituellement les neuf dixièmes du *travail maximum.*

2e *cas particulier.* — On peut encore chercher à simplifier davantage en supposant que le fer seul résiste à l'action du moment fléchissant M. Dans ce cas, il faut faire $m = 1$.

La formule (21) devient dans cette hypothèse :

$$\frac{RSh^2}{2} = M\left(\frac{h}{2} + r\right) \qquad (23)$$

L'erreur relative commise sur le calcul de S en prenant la formule (23) au lieu de la formule (21) s'obtient ainsi :

$$S_{21} = \frac{m.M}{R}\left(\frac{1}{h} + \frac{2r}{h^2}\right)$$

$$S_{23} = \frac{M}{R}\left(\frac{1}{h} + \frac{2r}{h^2}\right)$$

erreur relative $= \dfrac{S_{23} - S_{21}}{S_{21}} = \dfrac{1 - m}{m}$

pour $m = 0{,}60$, cette expression devient

$$\frac{1 - 0{,}60}{0{,}60} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}$$

C'est-à-dire que la section obtenue pour les barres en se servant de la formule (23) dépasse la section donnée par la formule (21) des deux tiers de cette dernière.

3e *cas particulier.* — Enfin, dernière simplification, on peut ne considérer que le *travail moyen* du fer dans les barres, c'est-à-dire, comme ci-dessus, négliger le terme en r. On arrive ainsi à une expression simple.

$$RSh = M \qquad (24)$$

L'erreur relative commise sur le calcul de S en prenant la formule (24) au lieu de la formule (21) s'obtient ainsi

$$S_{21} = \frac{m.M}{R}\left(\frac{1}{h} + \frac{2r}{h^2}\right)$$

$$S_{24} = \frac{M}{Rh}$$

erreur relative $= \dfrac{S_{24} - S_{21}}{S_{21}} = \dfrac{1 - m\left(1 + \frac{2r}{h}\right)}{m\left(1 + \frac{2r}{h}\right)}$

$$= \frac{1}{m\left(1 + \frac{2r}{h}\right)} - 1$$

$$= \frac{1}{m}\left(1 - \frac{2r}{h} + \frac{4r^2}{h^2} - \frac{8r^3}{h^3} + \cdots\right) - 1$$

En faisant $m = 0{,}60, \dfrac{2r}{h} = \dfrac{1}{10}$ et négligeant les termes en $\dfrac{r^2}{h^2}$, $\dfrac{r^3}{h^3}$, etc., il vient,

erreur relative $= \dfrac{1}{0{,}6}\left(1 - \dfrac{1}{10}\right) - 1 = \dfrac{1}{2}$

C'est-à-dire que la section obtenue pour les barres en se servant de la formule (24) dépasse de la moitié la section donnée par la formule (21) ou encore est trop forte d'un tiers de sa valeur.

Pour corriger la formule (24), il suffit de majorer dans les mêmes proportions les valeurs admises pour le coefficient R.

Ainsi, les valeurs reçues dans les constructions métalliques pour le coefficient R sont

Pour le fer	6 *kg* par millimètre carré
Pour l'acier.	9 —

Pour des considérations spéciales aux constructions de poutres armées de barres rondes, on peut majorer ces coefficients et adopter

Pour le fer.	8 *kg* par millimètre carré
Pour l'acier.	12 —

Enfin, pour corriger la formule (24) qui donne naturellement des sections de barres trop fortes d'un tiers, il suffira, pour la compensation, d'augmenter de moitié les coefficients précédents et de prendre

Pour le fer.	12 *kg* par millimètre carré
Pour l'acier.	18 —

En effet, on voit que, pour avoir la valeur exacte de S, il faut réduire d'un tiers la valeur de S_{24} ou $\dfrac{M}{Rh}$, ou, ce qui est la

même chose, multiplier cette expression par $\frac{2}{3}$, ou encore multiplier l'un des facteurs R du dénominateur par $\frac{3}{2}$.

E. — Conclusions.

De l'étude précédente, il ressort :

1° Que l'on peut, à l'aide des formules de la résistance des matériaux, calculer facilement une poutre hétérogène, fer et maçonnerie.

2° Que, en ce qui concerne spécialement les poutres dans lesquelles sont enchâssées des barres rondes métalliques, les calculs indiquent que pour obtenir le maximum de résistance, toutes choses égales d'ailleurs, il convient de distribuer ces barres en deux armatures symétriques par rapport au plan diamétral horizontal de la poutre.

3° Qu'on peut adopter pour le calcul de la section des armatures symétriques la formule simple $RSh = M$ dans laquelle on adoptera pour R les valeurs de 12×10^6 pour le fer et 18×10^6 pour l'acier, étant rappelé que S représente la section *d'une seule* armature et 2S la section totale des fers ou des deux armatures symétriques, et que la section du béton doit être au moins 25 fois celle du métal.

4° Qu'à la section ainsi trouvée par les armatures, il y a lieu d'ajouter un supplément dû à l'effort tranchant ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus au paragraphe (A).

CHAPITRE II

ÉTUDE PRATIQUE SUR LA COMPOSITION DES POUTRES DES PLANCHERS EN BÉTON DE CIMENT ARMÉ.

Nous avons vu précédemment que la poutre en béton de ciment armé, les armatures étant composées de fers ronds ainsi qu'il est d'usage dans la pratique, offre le maximum de résistance quand elle renferme deux armatures symétriques par rapport à son plan diamétral horizontal.

Nous allons montrer comment, par des considérations très différentes, on arrive au même résultat; combien la résistance de ces poutres est supérieure à une poutre entièrement métallique; enfin quelles sont les conséquences qu'entraînent les diverses positions de ces poutres sur les appuis.

Nous partagerons cette étude en trois paragraphes :

Les fers à planchers du commerce;

Les poutres en ciment armé avec deux armatures symétriques;

Les poutres en ciment armé avec une seule armature.

§ Ier. — *Les fers à planchers du commerce.*

Composition d'un plancher. — Un plancher se compose en général :

1° De poutres principales allant d'un mur à l'autre;

2° De poutrelles dans le sens perpendiculaire aux précédentes;

3° Du hourdis ou table constituant le plancher proprement dit.

Dans la construction de nos habitations, ces trois éléments sont habituellement constitués de la façon suivante :

Les poutres sont en fer ou en acier;

Les poutrelles sont en bois;

Le plancher est en planches.

Parfois, pour la construction du rez-de-chaussée et des sous-sols, les poutrelles sont supprimées et remplacées par des voûtes en briques reliant les poutres et supportant un carrelage ou un enduit en ciment.

Les planchers en ciment armé conservent les mêmes éléments que ci-dessus, mais ces éléments, poutres, poutrelles et hourdis sont tous composés de béton de ciment avec métal enchâssé.

Fers à planchers du commerce. — Comme les poutres ou poutrelles sont placées à une faible distance les unes des autres : 0,75 *m* à 1,50 *m*, que leurs portées sont modérées et ne dépassent guère 5 à 6 *m*, qu'enfin les charges qu'elles supportent par mètre courant ne sont pas très élevées, on emploie généralement les fers profilés du commerce, dits fers à planchers, que l'on fait travailler par prudence à 6 *kg* par millimètres carré, s'ils sont en fer et à 9 *kg* s'ils sont en acier.

La hauteur de ces fers varie de 80 à 260 *mm*, s'ils sont avec ailes ordinaires et de 80 à 400 *mm*, s'ils sont à larges ailes.

Pour chacun des profils, il se présente deux éléments constants :

p, le poids par mètre courant donné par les albums;

Mé, le moment d'élasticité ou couple des actions moléculaires du profil susceptible de faire équilibre au moment fléchissant des forces extérieures. Il est donné par l'expression connue de la résistance des matériaux : $\frac{RI}{v}$.

R, étant la tension ou compression par unité de surface de la section du métal : 6×10^6 pour le fer, 9×10^6 pour l'acier,

v, représentant la distance de la fibre neutre à l'élément le plus éloigné de cette fibre : soit encore $\frac{h}{2}$;

h étant la hauteur du profil;

I est le moment d'inertie.

Rappelons en passant que la fibre neutre, appelée aussi axe neutre, d'une pièce droite sollicitée par des forces verticales (c'est le cas que nous étudions) est le lieu géométrique des centres de gravité des sections transversales. Dans le cas où la section de la poutre est la même en tous ses points, l'axe neutre est une ligne droite (c'est encore le cas envisagé).

Indice d'élasticité des profils du commerce. — Le rapport entre le moment d'élasticité $M\acute{e}$ et le poids par mètre courant p d'une poutre profilée du commerce présente un certain intérêt. Désignons-le par ρ

$$\rho = \frac{M_e}{p}$$

Il représente le moment d'élasticité de la poutre par kilogramme de fer employé au mètre courant. Plus ρ est grand, mieux le métal est employé puisque cela veut dire que par kilogramme de fer le profil a une plus grande résistance. Ce rapport est vraiment l'*indice de l'élasticité* ou l'*indice de la résistance* du fer à plancher envisagé.

A l'aide des albums des forges, il est facile de calculer ce rapport pour chaque profil des fers à plancher du commerce.

Le tableau (page 30) donne ce rapport.

Les quantités $\frac{I}{v}$ et p sont données par les albums ;

R est pris égal à 6×10^6 ou 9×10^6, suivant qu'il s'agit de fer ou d'acier.

De ces éléments, on déduit de suite la valeur de ρ.

Des deux dernières colonnes du tableau, nous n'envisagerons que la dernière, celle relative à l'acier, qui suffit d'ailleurs à tirer les conséquences que nous voulons montrer.

On voit tout d'abord que ρ varie comme la hauteur du fer h, c'est-à-dire que plus h est grand plus ρ est considérable.

On voit ensuite que les fers à larges ailes donnent des valeurs de ρ plus considérables que les fers à ailes ordinaires, à hauteur égale.

On peut étudier de plus près les variations de ρ et de h en

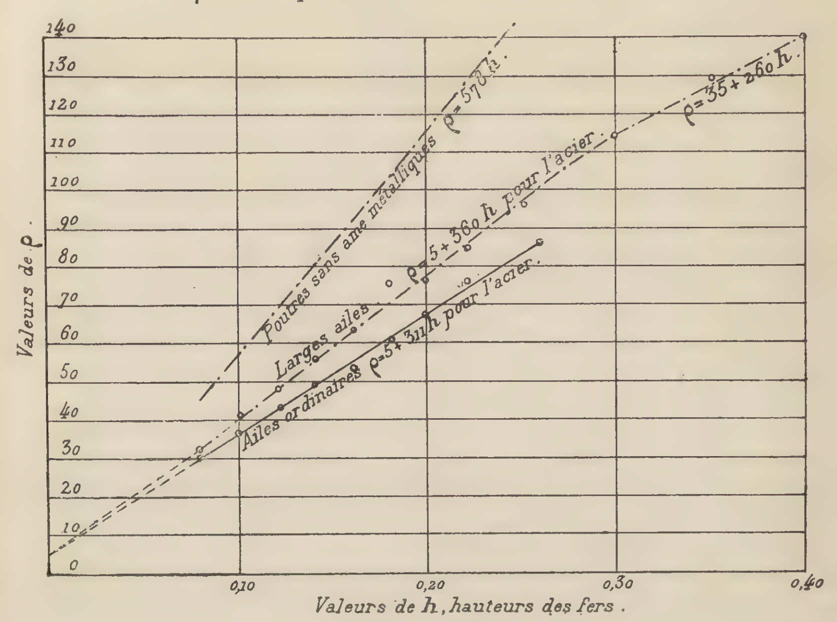
DÉSIGNATION des profils double T	p poids au mètre courant	h hauteur des fers	$\frac{I}{v}$	R		$\frac{RI}{v}$		$\frac{\frac{RI}{v}}{p} = \rho$	
				Fer	Acier	Fer	Acier	Fer	Acier
	Kilogr.	mètres		Kilogr.	Kilogr.	kgm.	kgm.	kgm.	kgm.
			Ailes ordinaires.						
$\frac{80 \times 40}{4}$	6	0,080	0,00001960	6×10^6	9×10^6	118	172	20	30
$\frac{100 \times 42,5}{4,5}$	7,5	0,100	0,00002984	id.	id.	179	269	24	36
$\frac{120 \times 45}{5}$	9	0,120	0,00004183	id.	id.	251	376	28	42
$\frac{140 \times 47}{5,5}$	11,5	0,140	0,00006159	id.	id.	370	554	32	48
$\frac{160 \times 50}{6}$	13,5	0,160	0,00007930	id.	id.	476	714	35	53
$\frac{180 \times 55}{6,5}$	16	0,180	0,00010607	id.	id.	636	954	40	60
$\frac{200 \times 60}{6,5}$	18,5	0,200	0,00013998	id.	id.	840	1 240	45	67
$\frac{220 \times 65}{7}$	21,5	0,220	0,00017806	id.	id.	1 068	1 603	50	75
$\frac{260 \times 75}{8,5}$	29,2	0,260	0,00027753	id.	id.	1 665	2 498	57	86
			Larges ailes.						
$\frac{80 \times 55}{3,5}$	7,5	0,080	0,00002771	6×10^6	9×10^6	166	249	22	33
$\frac{100 \times 60}{4}$	10	0,100	0,00004555	id.	id.	273	410	27	41
$\frac{120 \times 70}{5}$	13,2	0,120	0,00006935	id.	id.	416	624	32	47
$\frac{140 \times 80}{6}$	16,5	0,140	0,00010138	id.	id.	608	912	37	55
$\frac{160 \times 90}{6,5}$	19,8	0,160	0,00013926	id.	id.	836	1 253	42	63
$\frac{180 \times 100}{6\ 3/4}$	22,5	0,180	0,00018634	id.	id.	1 118	1 677	50	75
$\frac{200 \times 100}{7}$	25,5	0,200	0,00021468	id.	id.	1 288	1 932	51	76
$\frac{220 \times 110}{7,5}$	29,5	0.220	0,00027460	id.	id.	1 648	2 471	56	84
$\frac{250 \times 110}{8}$	37	0,250	0,00039174	id.	id.	2 350	3 526	64	95
$\frac{300 \times 130}{9\ 1/4}$	50	0,300	0,00062960	id.	id.	3 778	5 666	76	113
$\frac{350 \times 140}{11}$	67	0,350	0,00095700	id.	id.	5 742	8 613	86	129
$\frac{400 \times 140}{12\ 1/2}$	77	0,400	0,00119220	id.	id.	7 153	10 730	93	139

construisant une courbe dont les abcisses sont les valeurs de h et les ordonnées celles de ρ (fig. 5 ci-après).

Fig. 5. — Profils du commerce en acier et poutres sans âme en métal.
Indice d'élasticité

$$\rho = \frac{\frac{RI}{v}}{p},$$

p étant le poids du métal par mètre courant.



La courbe relative aux profils en acier avec ailes ordinaires est une ligne droite dont l'équation est

$$\rho = 5 + 311\ h$$

ρ étant exprimé en kilogrammètres et h en mètres.

La courbe relative aux profils en acier à larges ailes se compose de deux lignes droites juxtaposées pour $h = 0{,}30\ m$ et dont les équations sont

$\rho = 5 + 360\ h$ depuis $h = 0^m{,}08$ jusqu'à $h = 0^m{,}30$

et

$\rho = 35 + 260\ h$ depuis $h = 0^m{,}30$ jusqu'à $h = 0^m{,}40$.

Formule exprimant l'indice moyen d'élasticité en fonction de la hauteur. — Si, pour ne pas compliquer la question, nous envisageons seulement les hauteurs comprises entre 0,08 *m* et 0,30 *m*, soit les deux premières formules ci-dessus, si nous prenons la moyenne de leurs résultats, on obtient

$$\rho = 5 + 335\, h \qquad (a)$$

C'est là l'expression moyenne de l'indice d'élasticité des profils du commerce en acier en fonction de la hauteur *h* de ces profils.

On peut s'assurer sur maints exemples que pour des poutres formées d'âme, de cornières, de platebandes et de montants, judicieusement composées, l'indice d'élasticité oscille entre les mêmes limites, même si *h* atteint 1,50 *m* et 2 *m*.

La formule (*a*) est donc une formule générale présentant un grand degré d'approximation.

En cours de route, ajoutons que cette formule, au moins dans les études d'avant projet, peut avoir une grande utilité pratique. Supposons en effet que l'on connaisse, pour un point déterminé d'une poutre à l'étude, le moment fléchissant M des forces extérieures.

Ce moment M est équilibré par le moment d'élasticité de la poutre $\frac{RI}{v}$, en sorte que l'on a

$$M = \frac{RI}{v}.$$

D'autre part,

$$\rho = \frac{\frac{RI}{v}}{p}$$

Eliminons $\frac{RI}{v}$ entre ces deux égalités, il vient

$$\rho = \frac{M}{p}$$

ou

$$p = \frac{M}{\rho}$$

ou encore en éliminant ρ entre cette dernière et l'équation (*a*),

$$p = \frac{M}{5 + 335\, h}.$$

Dès lors, si l'on se donne h, qui varie entre le 1/8 et le 1/12 de la portée de la poutre, on trouve de suite le poids par mètre courant de celle-ci sans avoir besoin d'en faire la composition ou l'arrangement.

Rôle de l'âme des poutres métalliques. — La définition même de l'indice d'élasticité

$$\rho = \frac{\frac{RI}{v}}{p}$$

montre que ρ est proportionnel au moment d'inertie. Décomposons par la pensée la section d'un profil de fer à plancher en deux parties : *l'âme*, les *platebandes* (fig. 6).

Le moment d'inertie I de la poutre est égal à la somme des moments d'inertie de ces deux éléments.

Soient $\frac{S}{2}$ la surface de la platebande AB et celle de la demi-âme CD, c'est le cas moyen de la pratique,

h la hauteur du profil.

Le moment d'inertie de la platebande AB par rapport à l'axe du profil est très approximativement égal à

$$\frac{S}{2} \times \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

Le moment des deux platebandes est

$$2 \cdot \frac{S}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{Sh^2}{4}$$

Fig. 6.

Le moment d'inertie de la demi-âme CD par rapport à l'axe du profil est aussi approximativement

$$\frac{S}{2} \cdot \left(\frac{h}{4}\right)^2$$

Le moment des deux demi-âmes ou de l'âme entière est

$$2 \cdot \frac{S}{2}\left(\frac{h}{4}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{Sh^2}{16}$$

Le moment d'inertie total du profil est donc

$$\frac{Sh^2}{4} + \frac{Sh^2}{16} = S \cdot h^2 \times \frac{5}{16}$$

Le rapport entre le moment d'inertie de l'âme et le moment total est

$$\frac{Sh^2}{16} : Sh^2 \frac{5}{16} = \frac{1}{5} \text{ ou } 0{,}20$$

D'autre part, le rapport entre la section de l'âme, soit 2 S et la section totale du profil soit 4 S est de 1/2 ou 0,50.

Il résulte que l'âme absorbe la moitié du poids total de la poutre tandis qu'elle ne donne que le cinquième du moment d'inertie total.

Si, comme exemples réels, nous prenons les deux profils de 0,16 *m* de hauteur avec ailes ordinaires et avec larges ailes, les poids des âmes représentent respectivement les 50 0/0 et les 37 0/0 du poids total, tandis que les $\frac{I}{v}$ ne sont respectivement que les 25 0/0 et les 15 0/0 du $\frac{I}{v}$ total.

Le métal des âmes est donc moins bien utilisé que le métal des platebandes au point de vue du moment d'élasticité et son rôle consiste surtout à établir une liaison invariable entre les platebandes.

Moyen d'augmenter l'indice d'élasticité. — Il résulte de ce qui précède que, si la section de l'âme pouvait être supprimée et reportée par moitié sur les platebandes pour augmenter la section de celle-ci, si en outre les deux masses de fer ainsi isolées pouvaient être reliées par une autre substance, il n'est pas douteux que l'indice d'élasticité du métal subirait un accroissement important et atteindrait sa valeur limite.

Valeur limite de l'indice d'élasticité. — Dans cet ordre d'idées, soient deux masses de métal ayant chacune une section S exprimée en mètres carrés et dont les centres de gravité sont distants de la quantité h exprimée en mètres (fig. 7). Sup-

posons en outre que ces masses soient des cylindres circulaires de rayons égaux r et que, comme cela est réalisé dans la pratique, $\frac{r}{h}$ soit voisin de 1/20.

Ce système, étant considéré comme invariable grâce à la substance qui l'enchâsse, aura pour moment d'inertie :

$$2\left[\frac{\pi r^4}{4} + \pi r^2\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

$\frac{\pi r^4}{4}$ étant le moment d'inertie de chaque cercle par rapport à un axe passant par son centre ;

πr^2 la surface S de chaque cercle ;

$\pi r^2 \left(\frac{h}{2}\right)^2$ étant le terme additif quand on prend le moment non plus par rapport à l'axe précédent mais par rapport à un axe placé à mi-distance des deux centres ou à la distance $\frac{h}{2}$ de chacun d'eux.

Fig. 7.

L'expression précédente, après simplifications, devient

$$\frac{\pi r^2}{2}\left(r^2 + h^2\right)$$

D'autre part, en appelant R *l'effort moyen* imposé au métal par unité de surface, le moment résistant du système, donné par l'expression connue $\frac{RI}{v}$, a pour valeur

$$\frac{R.\ \frac{\pi r^2}{2}\left(r^2 + h^2\right)}{\frac{h}{2}}$$

Or, comme h^2 est environ 400 fois plus grand que r^2, on peut négliger ce dernier terme dans l'expression $h^2 + r^2$ et écrire :

$$R.\ \pi r^2 h$$

et si l'on observe que $\pi r^2 = S$, on a définitivement pour le moment résistant l'expression R. S. h.

On aurait pu d'ailleurs trouver plus rapidement ce résultat.

Soient A et B les deux barres (fig. 8);

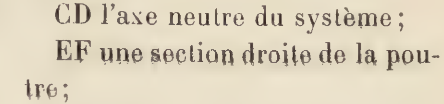


Fig. 8.

CD l'axe neutre du système;

EF une section droite de la poutre;

E'F' la position que prend cette section sous l'action des forces extérieures.

Les actions moléculaires du métal, qui forment un couple faisant équilibre au couple des forces extérieures ou moment fléchissant, se composent d'une force R. S développée dans la barre A et d'une autre force R. S dirigée en sens inverse de la précédente et développée dans la barre B. Le moment du couple de ces deux forces a pour valeur

$$R \cdot S h$$

la même que celle trouvée plus haut.

Ceci posé, le poids des deux masses par mètre courant est

$$2\ S \times 7800\ kg$$

On peut dès lors calculer ρ, en prenant pour l'acier $R = 9 \times 10^6$

$$\rho = \frac{R \cdot S \cdot h}{2 \cdot S \cdot 7800} = \frac{9 \times 10^6 \times h}{15600}$$

$$\rho = 577\ h. \qquad (b)$$

C'est là la limite supérieure de l'indice d'élasticité pour un poids de métal donné et pour une hauteur donnée.

Si l'on compare les formules (*a*) et (*b*), on voit que dans le second cas l'indice d'élasticité a augmenté de

$$\frac{577 - 335}{335} = 72\ 0/0.$$

On trouverait un résultat analogue pour le fer.

Avantages de la poutre sans âme métallique. — Ainsi, quand une poutre en métal de section déterminée peut oppo-

ser utilement un indice d'élasticité représenté par 100, le métal seul de la poutre sans âme, à deux armatures symétriques, de même section et de même hauteur que la première pourra opposer un indice d'élasticité représenté par 172. Chacune des deux masses de la poutre sans âme métallique pourra être composée de barres rondes de métal, comme l'a consacré la pratique, placées dans un même plan horizontal et à faible distance les unes des autres (fig. 9).

Axe neutre

$\frac{h}{2}$

$\frac{h}{2}$

Fig. 9.

En raison même de cette particularité qui ne nécessite aucun travail d'assemblage pour le métal, il est vraisemblable que le prix du kilogramme de fer ou d'acier sera notablement inférieur au prix du kilogramme des fers profilés ou des poutres composées.

De sorte que l'on peut affirmer comme conséquence que le prix du métal d'une poutre sans âme métallique sera au plus égal à la moitié du prix du métal d'une poutre avec âme métallique ayant même moment d'élasticité et même hauteur que la première (le métal étant seul considéré).

§ 2. — *Les poutres en ciment avec deux armatures métalliques symétriques.*

Substitution d'une âme en ciment à une âme métallique. — Comment remplacer l'âme métallique?

L'idée qui consiste à noyer deux masses de fer ou d'acier dans un même prisme de béton de ciment répond à la question.

Ce béton, en effet, acquiert au bout de peu de jours une rigidité suffisante pour maintenir les barres de métal dans une position invariable les unes par rapport aux autres.

C'est le béton de ciment armé.

C'est la poutre à deux armatures symétriques.

Cette poutre se retrouve ainsi par une autre voie que la voie

théorique du chapitre Ier et se déduit d'un simple fait d'observation au lieu de se déduire des formules complètes et rationnelles de MM. de Mazas et Hersent, des formules en usage au port de Toulon.

Et cependant, chose remarquable, dans la pratique des constructions, la double armature symétrique, qui non seulement répond au maximum de résistance, mais se présente aussi sous une forme rationnelle, n'a guère été connue jusqu'à ces derniers temps.

C'est la poutre à une seule armature principale placée à la partie inférieure du prisme de béton et agrémentée de tirants de tous systèmes, quelques-uns même brevetés, qui a été connue et employée.

Ce n'est que dans le numéro du journal *Le Ciment*, portant la date du 25 octobre 1897, qu'on voit réalisée et même expérimentée la poutre à deux armatures symétriques. Nous avons déjà parlé de ces expériences rapportées par M. de Tedesco, mais nous y reviendrons pour les examiner de plus près.

Dans le même journal, portant la date du 15 novembre 1897, M. Stellet arrive à préconiser aussi la poutre à deux armatures symétriques par l'examen des faits observés sur des poutres calculées ou construites par MM. Coignet, Hennebique et Cottancin, par l'idée de ne faire entrer que le fer dans les calculs auxquels s'appliquent alors les principes de la résistance des matériaux et par l'hypothèse (qui d'après l'auteur serait toujours réalisée) de l'encastrement sur les appuis.

Avantages du choix de l'âme en béton de ciment. — Le choix de l'âme en béton de ciment, pour les poutres à deux armatures symétriques, a des avantages considérables que nous allons envisager. Faisons remarquer toutefois que quelques-uns de ces avantages s'appliquent aux poutres avec une seule armature que nous envisagerons plus loin.

Le béton assure la conservation du métal. — Dans une pou-

tre en béton de ciment armé, le métal ne se rouille pas et se conserve intact. Nous avons pu constater, en 1886, lors de la démolition d'une des piles du vieux pont ogival de Soissons, que des agrafes en fer reliant entre elles les pierres de taille étaient parfaitement intactes bien que posées au XIII[e] siècle. M. Considère ayant fait desceller des pièces de fer encastrées depuis cinq, dix, quinze et même cinquante ans dans des blocs de ciment placés dans l'eau de mer, a observé que partout où la maçonnerie était bien pleine, le fer était dans le même état qu'au moment de la pose.

Le béton de ciment a même coefficient de dilatation que le fer. — Le béton de ciment et le métal ont même coefficient de dilatation. S'il n'en était pas ainsi, il est clair que la séparation des deux substances se réaliserait par le fait même des variations atmosphériques et thermométriques et que le fer serait libre dans sa gaine en béton. Or, non seulement l'expérience démontre qu'il n'en est rien et que le fer reste toujours adhérent au béton, mais encore, des essais faits au laboratoire de l'Ecole des Ponts et Chaussées, il résulte que les variations brusques de température n'ont pas d'action nuisible sur les poutres en ciment armé et que, en réalité, les coefficients de dilatation des deux substances sont sensiblement les mêmes :

0,0000130 à 0,0000148 pour le fer
0,0000135 pour le ciment.

Adhérence considérable du béton de ciment au fer. — Ces deux substances ont entre elles une adhérence considérable. D'après les expériences faites en Bavière par le professeur Bauchinger, la force d'adhérence du fer et du ciment atteint 40 à 47 *kg* par centimètre carré. Cette grande force d'adhérence ne permet pas de penser que le béton joue un rôle passif dans les poutres avec armatures métalliques. En effet, dès l'allongement ou le raccourcissement du fer sous l'action des forces extérieures, le béton est obligé, en raison de sa grande adhérence au métal, de participer au mouvement, par suite de

s'étendre ou de se comprimer, et enfin de développer des efforts moléculaires qui concourent à la résistance. Cette propriété, qui est extrêmement précieuse, explique pourquoi, dans les expériences rapportées par M. de Tedesco, le fer n'a pris qu'une partie des efforts qu'il aurait développés s'il avait été seul ou si le béton avait joué un rôle seulement passif. Cette part du fer descend parfois au-dessous de la moitié du total, c'est-à-dire que dans ce cas le béton prend une plus grande part que le fer dans la résistance. Du reste nous avons déjà parlé de cette question au chapitre Ier et nous y reviendrons encore en étudiant les expériences précitées.

L'enveloppe en ciment augmente le coefficient pratique de résistance du métal. — La barre métallique emprisonnée dans le bloc de béton rigide peut supporter en toute sécurité des efforts plus importants par unité de surface de sa section qu'une barre incorporée dans une poutre à âme métallique. En effet,

a) Elle ne peut flamber;

b) Elle ne comporte pas d'assemblages qui constituent les points faibles d'une construction métallique;

c) Elle conserve toujours sa section primitive puisque la rouille ne peut l'atteindre;

d) Elle affecte un profil (rond) qui possède le plus grand coefficient de résistance parmi les autres fers tels que cornières, doubles T, simple T, U, etc.;

Dans les constructions métalliques, nous avons déjà dit que l'on admet pour le travail pratique du fer 6×10^6 *kg* par unité de surface et pour celui de l'acier 9×10^6 *kg*. Pour les motifs énumérés ci-dessus, on peut avec sécurité adopter

Pour le fer, 8×10^6
Pour l'acier, 12×10^6

soit un tiers en plus. Nous pensons même que l'on pourrait, sans inconvénient, accepter la moitié en plus. Bornons-nous au tiers.

L'enveloppe en ciment augmente l'indice d'élasticité. — Il

a été dit que le fait de la suppression de l'âme pour la rapporter sur les platebandes augmentait l'indice de résistance de 100 à 172.

Il s'agissait, en l'espèce, des coefficients de sécurité ordinaires tant pour le fer que pour l'acier.

L'enchassement des barres dans du béton permettant d'augmenter ces coefficients de 1/3, le rapport entre l'indice de résistance du fer des poutres à deux armatures symétriques et celui des poutres métalliques sera porté à $172 \times 4/3$ ou 230 : 100.

Il est donc extrêmement intéressant de constater qu'à égalité de section de métal, c'est-à-dire à égalité de poids par mètre courant, à égalité de hauteur et à égalité de sécurité, le métal des poutres en ciment avec deux armatures symétriques résistera 2,30 fois plus que celui de la poutre avec une âme métallique.

Il est bon cependant d'ajouter que le bénéfice réalisé sur le métal pour une poutre de résistance donnée est atténué dans une certaine mesure par l'obligation de l'enchâsser dans du béton de ciment. Mais, tout compte fait, il reste une notable économie que nous allons calculer.

Économie réalisée par les poutres en béton de ciment à double armature symétrique. — Soient : P le prix de 1 m^3 de béton de ciment mis en place, y compris les coffrages et échafaudages, etc.

P_1 le prix de 1 *kg* de fer, mis en place

7 800 P_1 le prix de 1 m^3 de fer en place ;

μ le rapport du volume du ciment à celui du fer dans une poutre donnée.

Quand, dans une construction de cette nature, on emploie 1 m^3 de fer valant 7 800 P_1, il sera employé en même temps μ mètres cubes de béton de ciment valant μ P.

Le prix des poutres en béton de ciment armé dans lesquelles il sera employé 1 m^3 de fer sera donc

$$7800\ P_1 + \mu\ P.$$

D'autre part, si au lieu d'employer une poutre en béton armé on avait fait usage d'une poutre entièrement métallique dont la hauteur soit égale à celle des armatures de la précédente, il aurait fallu, pour obtenir la même résistance, d'après le paragraphe précédent, un poids de fer 2,30 fois plus grand et coûtant

$$2{,}30 \times 7800\ P_1 = 17940\ P_1$$

L'économie réalisée par l'emploi du béton est donc, par rapport à la poutre entièrement métallique, dans la proportion de

$$\frac{17940\ P_1 - 7800\ P_1 - \mu\ P}{17940\ P_1} \text{ ou } \frac{10140\ P_1 - \mu\ P}{17940\ P_1}$$

ou plus simplement

$$\frac{10000\ P_1 - \mu\ P}{18000\ P_1} \qquad (c)$$

Or, en général, $P = 200\ P_1$ (70 *fr* le mètre cube de béton, 0,35 *fr* le kilog de fer) et le rapport précédent devient

$$\frac{10000\ P_1 - 200\ \mu\ P_1}{18000\ P_1}$$

ou encore

$$\frac{100 - 2\ \mu}{180}$$

L'économie est nulle dès que $\mu = 50$. Elle croît quand μ diminue. Or μ ne peut guère descendre au-dessous de 15, de sorte qu'à ce moment on obtient le maximum de l'économie

$$\frac{100 - 30}{180} = 39\ 0/0$$

Pour la valeur moyenne $\mu = 25$, l'économie est

$$\frac{100 - 50}{180} = 28\ 0/0.$$

Si l'on avait pris $P = 250\ P_1$ l'économie serait nulle pour $\mu = 40$ et serait de 21 0/0 pour $\mu = 25$, avec maximum de 35 0/0 pour $\mu = 15$.

Si l'on avait pris $P = 150\ P_1$, l'économie serait nulle pour $\mu = 67$ et serait de 35 0/0 pour $\mu = 25$, avec maximum de 43 0/0 pour $\mu = 15$.

On peut donc dire :

1° Que pour la moyenne de $\mu = 25$, l'économie moyenne est voisine de 1/3 ;

2° Que cette économie décroît rapidement dès que μ augmente ;

3° Qu'elle devient négative aux environs de $\mu = 50$;

4° Qu'elle ne peut guère dépasser le maximum moyen de 40 0/0 pour $\mu = 15$.

Liaisons des armatures. — Quand les poutres ont de faibles hauteurs, la liaison des armatures entre elles paraît inutile parce que à chaque armature adhère un cylindre de béton important et tel que l'ensemble des deux cylindres constitue la poutre.

Quand la distance des armatures devient plus considérable, entre les deux cylindres solidaires des deux groupes de barres il existe un troisième cylindre central qui reste plus ou moins isolé ou tout au moins ne se trouve plus dans les cylindres d'adhérence des armatures.

Quelle est la distance qui doit exister entre les armatures pour que la liaison devienne nécessaire ? C'est à l'expérience de le dire.

Quelle doit être la nature des liaisons ? C'est encore un point qui n'est pas éclairci et que l'expérience seule peut révéler.

Quoi qu'il en soit, la liaison la plus simple, la plus économique consiste en un fil de fer de quelques millimètres de diamètres triangulant les barres. Mais est-il suffisant ?

Cette question des liaisons est donc encore obscure. En tous cas, les liaisons atténuent l'économie du paragraphe précédent.

Nombre des barres dans chaque armature. — L'étude de cette question comporte deux faces.

Etant donné une surface S que doit avoir une armature, on peut la composer avec un seul fer de rayon r, tel que

$$\pi r^2 = S.$$

ou avec n fers de rayon r' tel que

$$n.\pi r'^2 = S$$

Si l'on désigne par A le coefficient d'adhérence du fer au béton, A étant exprimé en kilog. par mètre carré de surface d'adhérence, la force d'adhérence par mètre courant de l'armature sera :

Avec une barre $2\pi r A$ (*d*)
Avec n barres $2n\pi r' A$ (*e*)

Or, si l'on remarque que des deux équations précédentes on peut tirer

$$\pi r^2 = n\pi r'^2$$

ou

$$r = r'\sqrt{n},$$

les deux expressions *d*) et (*e*) deviennent

$$2\pi r' A\sqrt{n}.$$

et

$$2\pi r' A n$$

et leur rapport est

$$\frac{2\pi r' A n}{2\pi r' A\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

Pour $n = 2$.................. ...	$\sqrt{n} = 1,141$
3.	$= 1,73$
4......	2,00
5..........	2,24
6.........	2,45, etc.

La force d'adhérence, pour un même poids de métal, est

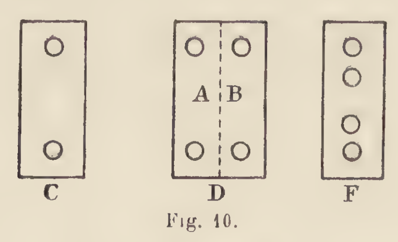


Fig. 10.

donc proportionnelle à la racine carrée du nombre des barres dont on compose l'armature.

D'après cela, il semble donc que la multiplication du nombre des barres dans chaque armature doit augmenter l'union

du fer et du ciment et améliorer la constitution de la poutre. Mais en pratique ce résultat ne paraît pas atteint.

En effet, une barre donnée représentée dans le profil C (fig. 10) ne peut être dédoublée (par exemple) que de deux façons : en disposant les deux barres plus petites sur un même plan horizontal, profil D, ou dans un même plan vertical, profil F.

Dans le cas du profil D : 1° l'adhérence relative du fer et du ciment n'a pas augmenté, contrairement à ce que pourrait faire croire l'étude précédente, parce que à chaque nouvelle barre continue doit correspondre un prisme de béton de même hauteur A ou B.

2° La largeur du profil du béton a augmenté et par suite sa surface, tandis que la surface du métal est restée la même ; il en résulte que le rapport μ entre la surface du béton et celle du fer a augmenté et que par suite l'économie de la poutre en ciment armé a diminué.

Dans le cas du profil F, l'adhérence a bien augmenté parce que le volume du béton est resté le même, mais en même temps le moment d'inertie a diminué par suite du rapprochement de l'axe neutre de la moitié de la surface du fer et la résistance de la poutre a subi une diminution notable.

Il convient d'ajouter cependant que c'est à l'expérience de résoudre cette question délicate.

§ 3. *Poutres en béton de ciment avec armature unique.*

Origine de la poutre avec armature unique. — Le rapport merveilleux de 100 : 230 dont il a été question ci-dessus a encore été amplifié par certains constructeurs par la considération suivante.

Une poutre de profil symétrique soumise à des efforts de flexion a sa fibre neutre représentée par une droite située au milieu de la hauteur (fig. 11). C'est-à-dire que pour une section déterminée AB, la flexion détermine une rotation de cette section autour de l'axe de symétrie G et amène la section AB en

A'B'. Il en résulte que la moitié GA de la section a ses fibres tendues parce qu'elle se déplace en GA' et que l'autre moitié GB a ses fibres comprimées parce qu'elle passe en GB'.

Dans la poutre à armatures symétriques, il se rencontre une armature pour faire face aux tensions, dans la région des tensions, et une armature pour faire face aux compressions, dans la région des compressions.

Mais si l'on remarque qu'en définitive le béton est une substance possédant une grande résistance à la compression et peut faire face seul aux efforts de cette nature, il vient

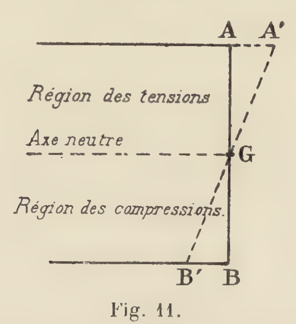


Fig. 11.

immédiatement à l'esprit d'utiliser cette propriété dans la région comprimée et de supprimer purement et simplement l'armature correspondante. De telle façon que, dans la région tendue, le métal est censé absorber tous les efforts, et que dans la région comprimée le béton joue seul un rôle actif, le métal ayant été supprimé.

C'est la poutre à armature unique de certains constructeurs.

Avantage apparent de cette poutre. — La poutre à armature unique ainsi conçue ne contient évidemment que la moitié du fer de la poutre à deux armatures.

On en conclut que le rapport 100 : 230 est remplacé dans ce système par 100 : 460 et que l'on pourrait dire : pour obtenir une résistance déterminée, il faut presque cinq fois moins de fer dans une poutre en béton à armature unique que dans une poutre entièrement métallique de même hauteur.

Cette poutre repose sur une conception fausse. — Entendue de cette façon, la conception de la poutre à armature unique est absolument fausse et a conduit à de nombreux déboires.

Cela s'explique facilement en faisant appel à la théorie de la résistance des matériaux exposée au chapitre Ier.

Soit 2S la section totale des deux armatures symétriques de la poutre primitive, λ le moment d'inertie de cette poutre.

Si cette section 2S était concentrée en une seule armature, le moment d'inertie deviendrait 0,70 λ (voir chap. Ier, § C).

Si maintenant, on réduit de moitié cette section 2S de l'armature unique, de façon à n'avoir plus qu'une seule armature de section S, il est facile de s'assurer que le moment d'inertie diminue encore de 25 0/0 au moins et que finalement il n'est plus que 0,50 λ au plus.

Ainsi, enlever l'armature de la région comprimée c'est réduire de plus de moitié le moment de résistance de la poutre, c'est imposer aux matériaux qui composent la poutre des coefficients doubles de ceux qu'on a supposés dans les calculs, c'est se rapprocher des conditions de rupture, c'est diminuer dans de grandes proportions la marge de sécurité. Aussi les résultats obtenus ont souvent laissé à désirer et parfois ont été mauvais.

Il convient donc de ne jamais employer de poutre en béton à armature unique dérivée d'une poutre à double armature dont on a supprimé l'une des armatures.

Conception rationnelle de la poutre à armature unique. — Si l'on veut employer des poutres à armature unique, il convient de calculer par la méthode rationnelle que nous avons indiquée au chapitre Ier. Mais, comme à égalité de profil et de poids des armatures, elles donnent lieu à un moment résistant inférieur de 20 à 30 0/0 de celui de la poutre à armatures symétriques, il ne convient d'en faire usage qu'en cas de nécessité.

Inconvénients de la poutre rationnelle à armature unique. — Cette poutre possède beaucoup d'inconvénients.

1° On vient d'abord de voir que le métal est moins bien employé que dans la poutre à armature symétrique.

2° Elle offre un gros prisme de béton entièrement dépourvu de métal et qui se présente avec toutes ses imperfections :

a) Homogénéité douteuse due à la fabrication du béton;

b) Homogénéité douteuse due à la pose dudit béton;

c) Incertitude sur le coefficient de résistance;

d) Manque d'intimité entre le métal et le béton.

Les constructeurs ont pallié cet inconvénient en lançant

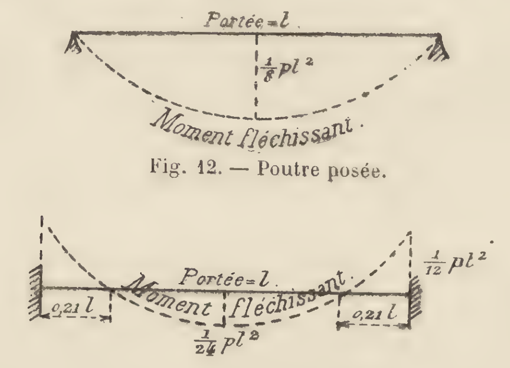


Fig. 12. — Poutre posée.

Fig. 13. — Poutre encastrée.

dans cette masse de béton des étriers en fer feuillard ou en fil de fer.

3° En raison même des défauts inhérents au prisme de béton qui empêchent d'avoir une entière confiance en cette matière quand elle est dépourvue de métal, la logique conduit à penser que ce genre de poutres ne convient que quand, sur toute leur longueur, la région comprimée reste la même et que l'on place de ce côté le bloc de béton dépourvu d'armature de telle sorte que le bloc ne travaille qu'à la compression.

Quand se présentera cette heureuse circonstance d'avoir une région comprimée continue sur toute la longueur d'une poutre ?

Une poutre est ou simplement posée sur ses appuis (fig. 12) ou encastrée sur ces mêmes appuis (fig. 13) (1).

Dans le premier cas, le moment fléchissant a le même sens dans toute la longueur de la poutre, il est maximum au milieu avec la valeur $\frac{1}{8} pl^2$, et il est nul sur les appuis.

p, poids par mètre uniformément réparti

l, portée de la poutre.

Dans le second cas, le moment fléchissant change deux fois de sens. Si l'encastrement est complet, il a pour valeur :

Sur les appuis $\frac{pl^2}{12}$,

Au milieu $\frac{pl^2}{24}$.

Il est nul aux 0,21 et aux 0,79 de la longueur.

Dans le premier cas, la région comprimée est continue sur toute la longueur de la poutre. L'emploi d'une poutre en béton armé conçue rationnellement peut être admis mais non conseillé.

Dans le second cas, la région comprimée n'est pas continue sur toute la longueur de la poutre puisque le moment fléchissant change deux fois de sens et entraîne avec lui le changement correspondant de cette région. La poutre à une seule armature ne convient donc pas à ce cas.

Enfin, il se pose une dernière question. Est-on sûr qu'une poutre est simplement posée et qu'elle n'est pas partiellement ou totalement encastrée? Quand une poutre pénètre dans un

---

(1) On entend ici par le mot poutre le prisme total béton et métal. Un auteur a écrit que du fait seul que les armatures ont une grande adhérence au ciment, on pouvait inférer que la poutre était dans un état complet d'encastrement sur les appuis. Cette opinion est erronée. L'on ne peut séparer ainsi le métal du béton qui l'enveloppe. Tout effort qui se produit dans le métal a sa répercussion dans le béton qui l'enchâsse. Le béton et le métal sont nécessaires (à des degrés différents) à la constitution d'une poutre : si l'un des deux éléments manque la poutre est incapable de remplir le but. Si la poutre est simplement posée, la fibre neutre prendra une inclinaison commune à la fois au ciment et au métal. Si un moment d'encastrement partiel ou total se développe sur l'appui et réduit ou annule l'inclinaison précédente, il est clair que l'effort qui en résulte de l'about de la poutre sera partagé par le métal et le béton et que l'inclinaison de la fibre neutre sera commune aux deux matières. L'adhérence des armatures au ciment n'engendre donc pas *ipso facto* l'encastrement complet de la poutre sur ses appuis.

mur et s'y appuie, il se produit généralement un moment d'encastrement plus ou moins complet dû à ce que le mouvement de relèvement des extrémités de la poutre, lorsque celle-ci s'incurve sous l'action des forces, est contrarié par les maçonneries du mur. On peut cependant réaliser le libre appui par des dispositions spéciales de sabots, rotules, jeu autour de la poutre, etc., mais, en général, ces dispositions augmentent le prix de la construction.

Quand, comme dans le cas des planchers en ciment armé, les armatures des poutres, poutrelles et hourdis sont enchevêtrées à leur rencontre, on peut penser qu'il y a encastrement aux points de rencontre pour toutes les pièces.

La poutre rationnelle avec armature unique ne convient que dans le seul cas où l'on a pris les mesures nécessaires pour assurer le libre repos sur les appuis.

4° Elle n'est pas économique ou l'est extrêmement peu. L'économie réalisée par la poutre à armatures symétriques sur la poutre entièrement métallique est de 30 à 33 0/0 en moyenne ainsi que nous l'avons vu au § 2. Or à égalité de poids de fer et de volume de ciment la poutre à armature unique offre un moment de résistance inférieur de 20 à 30 0/0 à celui de la poutre à armatures symétriques.

Il en résulte que pour obtenir une résistance égale entre les deux systèmes de poutres, il faut employer 20 à 30 0/0 de matières en plus avec l'armature unique dont le prix dès lors se rapprochera sensiblement du prix de la poutre totalement en fer.

5° Son emploi, dans le seul cas d'un libre repos sur les appuis, est défavorable au point de vue de l'économie, car il répond aux plus grandes valeurs du moment fléchissant et exige la plus grande section des fers et du béton.

Usages à faire de la poutre rationnelle à armature unique. — Il n'en faut faire aucun usage.

Le seul usage possible est celui du cas où l'on a pris les

précautions pour assurer le libre repos sur les appuis; mais, outre qu'elle coûte beaucoup plus que la poutre en béton à armature symétrique, elle atteint même et peut-être dépasse le prix de la construction métallique, enfin elle présente un fort prisme de béton dépourvu de métal qui abaisse, aux yeux du constructeur, le degré de sécurité. Donc, même dans ce cas spécial, il faut la laisser de côté.

§ D. *Conclusions.*

Le résumé du présent chapitre peut se faire en peu de mots :

1° La poutre à deux armatures symétriques doit être exclusivement employée.

2° La liaison et le nombre des fers des armatures sont deux points que l'expérience est appelée à éclaircir.

3° Dans la construction des planchers en ciment armé, l'encastrement complet des poutres sur les appuis doit être considéré comme généralement réalisé (sauf examen spécial du cas de l'about d'une poutre pénétrant dans un mur d'appui, examen qui sera entrepris plus loin).

CHAPITRE III.

RECHERCHE DES FORMULES PRATIQUES A UTILISER DANS LES CALCULS.

§ *A. — Rappel de formules.*

Rappel des formules du chapitre premier. — Il nous paraît nécessaire, pour faciliter les recherches, de rappeler les formules trouvées au chapitre premier en leur conservant les mêmes numéros d'ordre.

La signification des lettres employées dans ces formules qui ne se rapportent d'ailleurs qu'à des poutres à armatures symétriques (fig. 14) sont les suivantes :

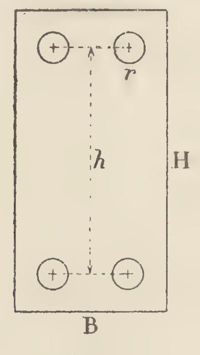


Fig. 14.

B largeur du prisme en béton,

H hauteur de ce prisme,

N nombre total des barres composant les deux armatures,

r rayon de ces barres, le même pour toutes,

h distance verticale entre les axes des armatures,

λ moment d'inertie total de la poutre hétérogène dans une section donnée,

R effort maximum attribué au métal par mètre carré et exprimé en kilogrammes,

R′ effort analogue pour le béton,

K rapport entre le cofficient d'élasticité du fer et le coefficient d'élasticité du béton,

M moment fléchissant des forces extérieures pour la section considérée,

m coefficient (ayant pour valeur 0,60) de réduction du moment fléchissant M; la part du moment fléchissant M auquel fait équilibre le moment d'inertie des armatures seules étant représenté par *m*M.

2S section totale des armatures, $2S = N\pi r^2$.

Formules rigoureuses pour le calcul des barres et du béton.

$$\lambda = \frac{BH^3}{12} + KN\frac{\pi r^4}{4} + KN\pi r^2 \frac{h^2}{4} \qquad (17)$$

$$R = \frac{M.K.\left(\frac{h}{2} + r\right)}{\lambda} \qquad (18)$$

$$R' = \frac{M\ \frac{H}{2}}{\lambda} \qquad (19)$$

Comme habituellement, on peut négliger r^2 dans l'expression $(r^2 + h^2)$ sans commettre une erreur de plus de 1/400, on peut aussi écrire

$$\lambda = \frac{BH^3}{12} + 2KS\frac{h^2}{4} \qquad (20)$$

Dans ces formules, on peut attribuer aux lettres les valeurs suivantes :

$K = 19$
$R = 8 \times 10^6$ pour le fer; 12×10^6 pour l'acier,
$R' = 56 \times 10^4$

Formules exactes pour le calcul des armatures seules.

a. $$RS\frac{h^2}{2} = m.M\left(\frac{h}{2} + r\right) \qquad (21)$$

avec $R = 8 \times 10^6$ pour le fer, 12×10^6 pour l'acier
$m = 0.60$

La formule (21) est exacte.

b. $$RSh = M \qquad (24)$$

La formule (24) est aussi exacte, à la condition de prendre

$R = 12 \times 10^6$ pour le fer, 18×10^6 pour l'acier et avec l'hypothèse $m = 0{,}60$ et $\frac{r}{h} = \frac{1}{10}$.

Formules approchées pour le calcul des armatures seules.

c.
$$RSh = m \,.\, M \qquad (22)$$
avec $R = 8 \times 10^6$ pour le fer, 12×10^6 pour l'acier
$m = 0{,}60$.

Elle donne pour S des valeurs trop faibles de 1/10.

d.
$$R \,.\, S \frac{h^2}{2} = M \left(\frac{h}{2} + r\right) \qquad (23)$$
avec $R = 8 \times 10^6$ pour le fer, 12×10^6 pour l'acier.

Elle donne pour S des valeurs trop fortes que l'on ramène à la réalité en les multipliant par 0,60.

e.
$$RSh = M \text{ (1)} \qquad (24)$$
avec $R = 8 \times 10^6$ pour le fer, 12×10^6 pour l'acier.

Elle donne pour S des valeurs trop fortes que l'on ramène à la réalité en les multipliant par $\frac{2}{3}$ (ou encore, comme il est dit plus haut, elle donne des valeurs exactes en majorant de moitié les coefficients de résistance R).

Formule employée. — Nous ferons usage de la formule (24) qui est la plus simple et nous adopterons comme coefficient de sécurité du fer 12×10^6 et de l'acier 18×10^6 de façon qu'elle donne des sections exactes.

$$RSh = M. \qquad (24)$$

Cependant si les hypothèses $m = 0{,}60$ et $\frac{r}{h}$ voisin de 1/20 n'étaient pas réalisées, il faudrait avoir recours à la formule (21).

(1) Dans le journal « *Le Ciment* » du 15 novembre 1897, on trouve une formule analogue

$$R \,.\, \Omega \,.\, h = M.$$

mais dans laquelle Ω est la section totale des armatures, les autres lettres ayant même signification que ci-dessus. Elle donne ainsi comme section totale des 2 armatures, ce qui ne doit être que la section d'une seule armature. Elle est donc inexacte. Elle ne tient d'ailleurs pas compte du travail du béton qui en réalité figure dans la formule 24.

La condition que $\frac{r}{h}$ soit voisin de $\frac{1}{20}$ est particulièrement indispensable. Reprenons en effet la comparaison des sections données par les formules (21) et (24).

On a vu au chapitre premier, § E, 3e cas particulier, que

$$\frac{S_{24} - S_{21}}{S_{21}} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{2r}{h}\right) - 1$$

posons $m = 0{,}60$ ou $\frac{3}{5}$ et $\frac{2r}{h} = \nu$, on a

$$\frac{S_{24} - S_{21}}{S_{21}} = \frac{5}{3}\left(1 - \nu\right) - 1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\nu$$

ou

$$S_{24} - S_{21} = S_{21}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{3}\nu\right)$$

$$S_{21} = \frac{S_{24}}{\frac{5}{3}(1 - \nu)}$$

Ayant calculé les sections avec la formule S_{24}, il faudra donc diviser les résultats obtenus par $\frac{5}{3}$ $(1 - \nu)$, si l'on veut obtenir les sections exactes.

Mais si l'on remarque que S_{24} est donné par la formule

$$S_{24} = \frac{M}{Rh}$$

On a aussi

$$S_{21} = \frac{S_{24}}{\frac{5}{3}(1 - \nu)} = \frac{M}{\frac{5}{3}R\,(1 - \nu)\,.\,h}$$

On obtiendra donc les résultats exacts, en remplaçant dans la formule (24) R par $\frac{5}{3}$ R $(1 - \nu)$.

Or R a pour valeur 8 *kg* par millimètre carré. S'il s'agit du fer, et 12 *kg* s'il s'agit d'acier.

Si	$\nu = \frac{1}{10}$	R (fer) pourra être remplacé par		12,0 *kg*
	$\nu = \frac{1}{9}$	—	—	11,8 »
	$\nu = \frac{1}{8}$	—	—	11,7 »
	$\nu = \frac{1}{7}$	—	—	11,4 »
	$\nu = \frac{1}{6}$	—	—	11,1 »

Il est évident que si pour $\nu > \frac{1}{10}$ on continue à prendre $R = 12$ pour corriger la formule (24), on obtiendra une sécurité moindre puisque l'on ne devrait faire usage que des coefficients 11,8 — 11,7, etc.

Ainsi donc il ne conviendra d'adopter la formule (24) avec $R = 12 \times 10^6$ pour le fer et 18×10^6 pour l'acier, que si le rapport entre le diamètre des fers et la distance d'axe en axe des armatures ne dépasse pas ou peu 1/10. Toutefois, le rapport 1/8 ne donne pas encore une bien grosse erreur. Quand le rapport $< \frac{1}{10}$ la sécurité augmente.

Efforts dus à l'effort tranchant. — Nous avons vu au chapitre premier que les efforts dus au cisaillement doivent aussi entrer en ligne de compte. L'effort tranchant A en un point situé à la distance x de l'appui a pour valeur

$$A = \frac{d \cdot M}{dx}$$

Cet effort, dans le cas du calcul des armatures par la formule (24) qui suppose l'emploi total des fers et du béton pour résister au moment fléchissant seul, donnera lieu à un supplément de métal de section S', tel que

$$S' = \frac{A}{R'}$$

R' étant le coefficient de résistance au cisaillement. Nous prendrons $R' = \frac{R}{2}$, soit à 6 *kg* pour le fer et 9 *kg* pour l'acier.

Dès lors.

$$S' = \frac{2 \cdot A}{R} \qquad (24\ bis)$$

§ B. — *Méthode générale de calcul des armatures.*

Pour calculer les armatures d'une poutre en béton de ciment armé soumise à des efforts quelconques, il convient

d'examiner séparément la marche du moment fléchissant et celle de l'effort tranchant.

Barres de résistance au moment fléchissant. — La formule (24) donne pour la section des barres *d'une* armature

$$S = \frac{M}{Rh}$$

R est connu, puisqu'il est égal à 12 *kg* par millimètre carré pour le fer et à 18 *kg* pour l'acier.

h est la distance assignée entre les axes des armatures.

M est une quantité variable en chaque point de la poutre.

On tracera la courbe des moments fléchissants M et on cherchera, comme dans les poutres entièrement métalliques, les valeurs de S pour lesquelles l'expression RSh enveloppe la courbe M. On sera donc ainsi conduit à calculer des barres allant d'un bout à l'autre de la poutre et des barres supplémentaires ne régnant que sur des parties de la portée, absolument comme lorsqu'il s'agit des poutres entièrement métalliques (voir à ce sujet le numéro du journal « *Le Ciment* » du 15 novembre 1897).

Inconvénients des barres supplémentaires destinées à résister au moment fléchissant. — Les barres supplémentaires donnent lieu à diverses objections.

a) Dans les poutres entièrement métalliques, ce sont habituellement des semelles qui forment le supplément du profil normal et ces semelles sont intimement liées au corps même des poutres. Dans les poutres en béton de ciment armé, la liaison n'est plus aussi intime : les barres supplémentaires sont isolées dans la masse de béton sans liaison avec les barres continues. Est-il légitime, dans ces conditions, de leur faire jouer le même rôle que les semelles supplémentaires des poutres métalliques? C'est à l'expérience de résoudre cette question.

b) Les barres supplémentaires ne présentent pas toute l'économie que l'on pourrait croire : si elles sont placées dans le

même plan horizontal que les barres continues (fig. 15), elles conduisent à une augmentation de la largeur et du cube du béton, si elles sont placées dans un même plan vertical (fig. 16) elles sont rapprochées de l'axe et leur moment d'inertie est amoindri. Ces inconvénients ne se présentent nullement dans les poutres métalliques.

Dans la figure 15 ci-dessous : *a* sont les barres continues,

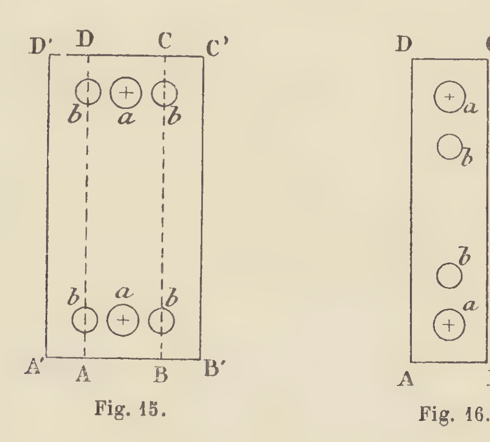


Fig. 15. Fig. 16.

ABCD le volume de béton correspondant; *b* sont les barres discontinues, A'B'C'D' le nouveau profil du béton. La figure 16 montre les barres supplémentaires dans le même plan vertical.

c) Les barres supplémentaires compliquent les armatures et, par suite, augmentent la dépense de mise en place par kilogramme de fer.

d) Enfin, ce système très séduisant a le tort considérable d'être adapté à un état théorique qui a des chances plus ou moins nombreuses de n'être pas réalisé. Il ne faut pas oublier que ce n'est plus le métal, mais le ciment qui l'enveloppe qui est emprisonné dans les maçonneries des appuis, qu'il se produit une liaison de la poutre avec les appuis qui n'est pas nettement définie et qui, par suite, est difficile à apprécier à l'avance. Ainsi, si l'on a posé l'hypothèse d'un encastrement complet, il peut n'être que partiel, si l'on a supposé un repos libre sur les appuis, l'encastrement peut se produire. De telle sorte que

les barres supplémentaires ne joueront pas le rôle attribué et que les barres continues se trouveront en défaut là où elles paraissaient suffisantes. La sécurité n'est donc plus complète. Donnons un exemple. Supposons que l'on ait supposé l'encastrement complet et que l'on ait calculé les barres continues sur la valeur du moment fléchissant au milieu, soit $\frac{1}{24} pl^2$. Pour un motif quelconque, l'encastrement n'est pas réalisé. Immédiatement le moment fléchissant au milieu devient $\frac{1}{8} pl^2$ et triple de valeur et le fer en cet endroit travaille trois fois plus que l'hypothèse du calcul.

En résumé, il paraît prudent de ne pas faire usage de barres supplémentaires pour résister au moment fléchissant parce qu'elles n'offrent ni l'économie souhaitée, ni l'entière sécurité.

Il semble qu'il vaut mieux calculer les barres avec la plus grande valeur de M et leur conserver une section constante.

Barres de résistance, à l'effort tranchant. — C'est la formule (24 *bis*) qui servira

$$S' = \frac{2A}{R}$$

On construira la courbe des efforts tranchants A et l'on pourra déterminer la section S′ en chaque point.

Comme nous avons conseillé ci-dessus de prendre pour la section 2S des barres de résistance au moment fléchissant celle qui correspond au maximum de M, il arrivera que cette section 2S se trouvera trop forte en certains points, dans certaines régions et que l'excédant pourra servir à constituer S′ en tout ou en partie.

Si donc en un point x_1, le moment fléchissant exige des barres de section $2S_1$ et l'effort tranchant des barres de section S_1', on calculera l'excès.

$$2S - 2S_1$$

Si cet excès est supérieur à S_1', les barres spéciales pour la résistance à l'effort tranchant seront inutiles en ce point x_1,

si cet excès est inférieur à S_1', la section desdites barres pourra n'être que

$$S_1' - (2S - 2S_1)$$

Chaque cas exige ainsi une étude spéciale de cette fonction. Nous en verrons des exemples plus loin.

§ C. — *Poutres droites encastrées à leurs extrémités et uniformément chargées.*

C'est le cas, ainsi que nous l'avons expliqué, qui se rencontre le plus souvent dans les études relatives aux planchers en ciment armé.

Calcul des armatures de résistance au moment fléchissant. — Reprenons la formule (24).

$$S = \frac{M}{Rh.}$$

Quand une poutre est encastrée complètement sur deux appuis et porte une charge uniformément répartie de p kilog. par mètre courant, le moment fléchissant en un point situé à une distance x de l'appui a pour valeur

$$M = \frac{1}{12} pl^2 - \frac{plx}{2} + \frac{px^2}{2}$$

Sur la longueur de la poutre il est représenté par la parabole EDF (fig. 17) qui présente sur les appuis un moment d'encas-

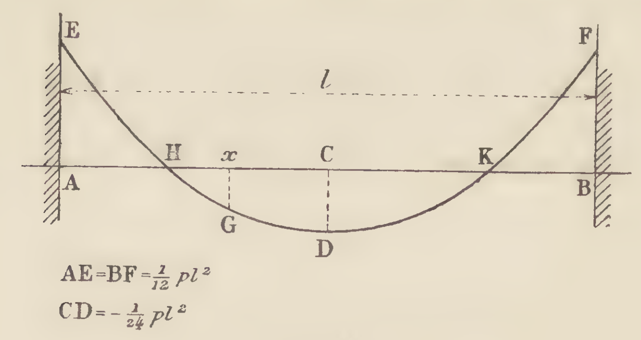


Fig. 17.

trement $AE = BF = \frac{1}{12} pl^2$ et au milieu un moment CD de

signe contraire au précédent ayant pour valeur $-\frac{1}{24}pl^2$. Le moment M est nul aux points H et K situés aux 0,21 et aux 0,79 de la portée.

Comme nous n'admettons pas de barres supplémentaires, nous calculerons la section des barres avec le maximum de M, soit $\frac{1}{12}\ pl^2$.

La formule (24) prend ainsi la forme,

$$S = \frac{\frac{pl^2}{12}}{Rh} \tag{25}$$

qui, en supposant l'emploi du fer, c'est-à-dire $R = 12 \times 10^6$, devient

$$S = \frac{pl^2}{144 \times 10^6 \times h} \tag{25 bis}$$

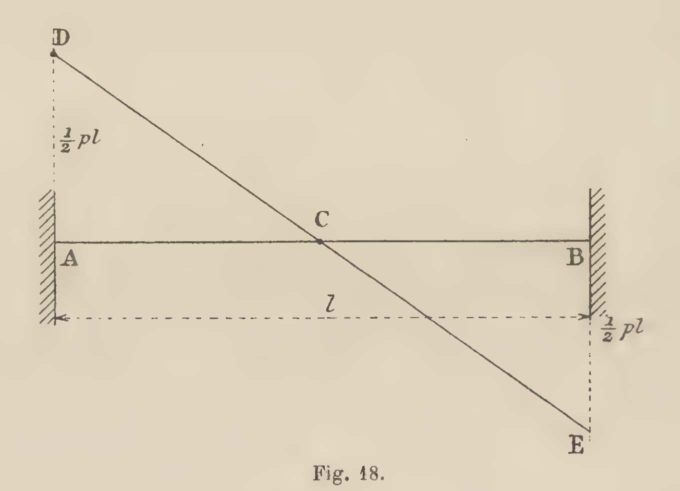


Fig. 18.

Calcul des barres aux appuis pour résister à l'effort tranchant. — L'effort tranchant A est la dérivée du moment fléchissant M et a pour valeur

$$A = \frac{pl}{2} - px$$

Il est représenté par la droite DE (fig. 18). Son maximum a

lieu sur les appuis et a pour valeur $AD = BE = \frac{pl}{2}$. Il est nul au milieu de la portée.

La section des barres destinées à résister à cet effort et calculées sur son maximum aura pour expression, d'après la formule (24 *bis*)

$$S' = \frac{pl}{R} \qquad (26)$$

ou en employant le fer.

$$S' = \frac{pl}{12 \times 10^6} \qquad (26\ bis)$$

Rapport de la section des barres aux appuis à celle des armatures. — Le rapport de la section S′ à la section totale 2S des armatures est

$$\frac{S'}{2S} = \frac{pl}{R} : \frac{\frac{2\,pl^2}{12}}{Rh} = \frac{6h}{l}$$

Ce rapport prend les valeurs suivantes pour les rapports pratiques de l et h.

pour $l = 12\,h$ . . . . $\frac{6h}{l} = \frac{1}{2}$

$l = 18\,h$ . . . . $= \frac{1}{3}$

$l = 24\,h$ . . . . $= \frac{1}{4}$

Les barres aux appuis ont donc en pratique une section qui varie de la moitié au quart de celle des barres principales.

Longueur des barres aux appuis. — L'examen de la courbe représentant le moment fléchissant montre que ceux-ci décroissent rapidement à partir des appuis que, par suite, la section 2S calculée pour résister au moment d'encastrement, devient rapidement trop grande. Mais comme on lui conserve une valeur constante d'un bout à l'autre de la poutre, on est conduit à utiliser l'excédant pour résister à l'effort tranchant dès que la section 2S est suffisante seule pour faire face à la fois aux deux séries d'efforts.

Soit x_1, l'abscisse pour laquelle la section 2S est suffisante, $2S_1$ la section nécessaire pour résister au moment fléchissant en ce point x_1.

S'_1 la section nécessaire pour résister à l'effort tranchant au même point.

On a d'abord :

$$2\,S = 2\,S_1 + S'_1$$

Dans cette égalité, il convient de remplacer S, S_1 S'_1 par leurs valeurs que nous allons calculer.

2S est donné par la formule (25)

$$2\,S = \frac{\frac{2\,pl^2}{12}}{Rh} \text{ ou } \frac{p}{Rh}\left(\frac{l^2}{6}\right)$$

S_1 est donné par la formule générale (24) dans laquelle on a remplacé M par sa valeur particulière pour $x = x_1$.

$$2\,S_1 = \frac{2Mx_1}{Rh}$$

Or

$$Mx_1 = +\frac{1}{12}pl^2 + \frac{1}{2}\,px_1^2 - \frac{1}{2}\,plx_1$$

(Voir l'équation relative à la figure 16).

D'où

$$2\,S_1 = \frac{+\frac{1}{6}\,pl^3 + px_1^2 - plx_1}{Rh} \text{ ou } \frac{p}{Rh}\left(\frac{l^2}{6} + x_1^2 - lx_1\right)$$

S'_1 est donné par l'expression

$$S'_1 = \frac{\frac{pl}{2} - px_1}{\frac{R}{2}} \text{ ou } \frac{p}{Rh}\left(lh - 2hx_1\right)$$

Tant que l'on aura

$$\frac{p}{Rh} \times \frac{l^2}{6} \geqslant \frac{p}{Rh}\left(\frac{l^2}{6} + x_1^2 - lx_1\right) + \frac{p}{Rh}\,(lh - 2hx_1)$$

les barres continues suffiront à résister aux deux sortes d'efforts. Considérons donc les variations de la fonction

$$\frac{p}{Rh}\left(\frac{l^2}{6} - \frac{l^2}{6} - x_1^2 + lx_1 - lh + 2hx_1\right)$$

Cherchons les valeurs de x_1 pour lesquelles elle s'annule. Ces valeurs sont données par l'équation

$$x_1^2 - x_1 (2h + l) + lh = o$$

$$x_1 = \frac{l + 2h \pm \sqrt{l^2 + 4h^2}}{2}$$

Or, comme le terme $4\,h^2$ est très petit par rapport à l^2 on peut le négliger sans erreur sensible et écrire

$$x_1 = \frac{l + 2h \pm l}{2}$$

La seule valeur admissible est

$$x_1 = h$$

Ce qui s'exprime en disant que les barres aux appuis doivent déborder ceux-ci d'une longueur égale à la distance des axes des armatures de la poutre.

Lorsque x_1 varie de h à $\frac{l}{2}$, la fonction primitive ne change plus de signe et reste positive. Ainsi pour $x_1 = \frac{l}{2}$, elle a pour valeur

$$\frac{ph}{R}\left(-\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{2} - lh + lh\right) \text{ ou } + \frac{phl^2}{4R}$$

Cette longueur h est un maximum car dès que la poutre cesse d'être encastrée complètement, pour un motif quelconque, immédiatement le moment d'encastrement diminue et la section des barres principales calculée par la formule (25) devient trop forte et peut faire face à une partie de l'effort tranchant. Les raisons qui ont fait repousser les barres supplémentaires pour résister au moment fléchissant n'existent pas pour celles qui doivent résister à l'effort tranchant.

§ D. — *Poutres droites uniformément chargées et simplement posées sur leurs appuis.*

Ce cas est peu fréquent dans les constructions des planchers en ciment armé. Mais comme il peut se rencontrer fréquemment dans d'autres problèmes que les constructeurs ont à résoudre, nous en parlons ici.

Calcul des armatures de résistance au moment fléchissant. — Appliquons la formule (24)

$$S = \frac{M}{R\,.\,h\,.}.$$

Quand une poutre repose librement sur deux appuis et qu'elle porte une charge uniformément répartie de *p kg* par mètre courant, le moment fléchissant en un point situé à une distance x de l'appui a pour valeur

$$M = \frac{px^2}{2} - \frac{1}{2}\, plx\,;$$

sur la longueur de la poutre, il est représenté par la parabole ADB (fig. 19, page 66) dont l'ordonnée maxima CD a lieu au milieu de la portée AB et a pour valeur $\frac{1}{8}\, pl^2$. Le moment est nul aux appuis.

Comme nous n'admettons pas de barres supplémentaires, nous calculerons la section des barres avec le maximum de M, soit $\frac{1}{8}\, pl^2$.

La formule (24) prend ainsi la forme

$$S = \frac{\frac{1}{8}\, pl^2}{Rh} \qquad (27)$$

qui en supposant l'emploi du fer, c'est-à-dire $R = 12 \times 10^6$, devient

$$S = \frac{pl^2}{96 \times 10^6 \times h}.$$

Remarque. — Si, au lieu d'employer le fer, on employait l'acier avec $R = 18 \times 10^6$, on aurait

$$S = \frac{pl^2}{144 \times 10^6 \times h}$$

formule identique à la formule 25 *bis*. D'où la conclusion :

La formule (25 *bis*) s'applique aux poutres encastrées aussi bien qu'aux poutres simplement posées sur les appuis, mais dans le premier cas elle s'applique à des barres en fer, tandis que dans le second elle s'applique à des barres en acier.

Calcul des barres pour résister à l'effort tranchant. — L'effort tranchant A qui est la dérivée du moment fléchissant a même valeur que dans les poutres encastrées (fig. 18) et la section des barres nécessaires pour résister à cet effort est donné par la formule (26)

$$S' = \frac{pl}{R}.$$

Mais on remarquera par la comparaison des diagrammes des figures 18 et 19 que le moment fléchissant est nul quand l'effort tranchant est maximum et inversement.

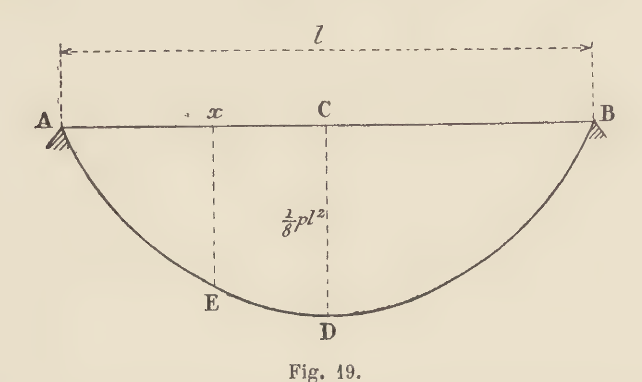


Fig. 19.

Dès lors la question se pose ici de savoir si la section

$$S = \frac{\frac{1}{8}pl^2}{Rh}$$

est suffisante pour satisfaire aux efforts de cisaillement.

Calcul de la longueur de ces barres. — En ce qui concerne les barres supplémentaires nécessaires pour résister à l'effort tranchant, nous allons d'abord déterminer leur longueur et ensuite leur section.

Comme précédemment, en un point x_1, la section des barres nécessaires pour résister au moment fléchissant est de

$$2 \times \frac{\frac{plx_1}{2} - \frac{px_1^2}{2}}{Rh} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{Rh}(lx_1 - x_1^2),$$

celle des barres nécessaires pour résister à l'effort tranchant est de

$$\frac{\frac{pl}{2} - px_1}{\frac{R}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{Rh}(lh - 2x_1h).$$

La section des barres continues (27) est de

$$2 \times \frac{\frac{1}{8}pl^2}{Rh} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{Rh}\left(\frac{l^2}{4}\right).$$

Tant que l'on aura

$$\frac{p}{Rh} \times \frac{l^2}{4} \geqslant \frac{p}{Rh}(lx_1 - x_1^2) + \frac{p}{Rh}(lh - 2hx_1)$$

les barres continues suffiront à résister aux deux sortes d'efforts.

Considérons donc les variations de la fonction

$$\frac{p}{Rh}\left[\frac{l^2}{4} - (lx_1 - x_1^2) - (lh - 2hx_1)\right].$$

Cherchons les valeurs de x_1 pour lesquelles elle s'annule. Ces valeurs sont données par l'équation

$$\frac{l^2}{4} - (lx_1 - x_1^2) - (lh - 2hx_1) = 0$$

ou

$$x_1^2 + x_1(2h - l) + \frac{l^2}{4} - lh = 0$$

d'où

$$x_1 = \frac{l - 2h \pm 2h}{2}.$$

La fonction s'annule donc pour $x_1 = \frac{l}{2} - 2h$ et $x_1 = \frac{l}{2}$.

Comme elle représente une parabole du 2e degré à axe vertical, qu'elle est positive pour $x_1 = 0$, on en conclut qu'elle reste positive jusqu'à $x_1 = \frac{l}{2} - 2h$ et qu'elle est négative entre $x_1 = \frac{l}{2} - 2h$ et $x_1 = \frac{l}{2}$. C'est donc dans cette dernière région que des barres supplémentaires pour résister à l'effort tranchant seront nécessaires. Elles auraient pour longueur $4h$ et seraient placées au centre de la portée.

Calcul de la section de ces barres. — Dans cette même région, la fonction part de zéro pour aboutir à zéro après avoir passé par un maximum pour $x_1 = \frac{l}{2} - h$ et qui a pour valeur

$$\frac{p}{Rh}\left[\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2} + lh + \frac{l^2}{4} - lh + h^2 - lh + lh - 2\,h^2\right]$$

$$\text{ou} \quad -\frac{ph^2}{Rh} \quad \text{ou} \quad -\frac{ph}{R}. \qquad (28)$$

C'est cette valeur qu'il convient d'adopter pour la section S' des barres supplémentaires à placer au centre de la poutre sur la longueur de $4h$.

Ces barres sont inutiles. — Le rapport entre cette section et celui des barres principales

$$\frac{ph}{R} : 2 \times \frac{\frac{1}{8}\,pl^2}{Rh} = 4\,\frac{h^2}{l^2}$$

est d'ailleurs fort petit. Pour les valeurs de $\frac{h}{l} = \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}$, il est de 0,030, 0,012, 0,007. Ce qui conduit, dans la pratique, à ne pas faire usage de ces barres.

§ E. — *Poutres droites uniformément chargées et partiellement encastrées sur leurs appuis.*

Dans les études relatives aux planchers en béton de ciment armé, on rencontre souvent le cas de poutres reposant sur les murs d'appuis avec un encastrement partiel.

L'objet du présent paragraphe est le suivant :

Ayant calculé les poutres dont les extrémités sont enchâssées dans les murs d'appuis comme si elles étaient encastrées complètement à l'aide de la formule (25 *bis*) pour les barres de résistance au moment fléchissant et à l'aide de la formule (26 *bis*) pour les barres de résistance à l'effort tranchant, quels changements convient-il de faire subir aux résultats donnés par ces formules si l'encastrement cesse d'être parfait?

Définition de l'encastrement. — On dit qu'une poutre est

simplement posée sur un appui quand sa liaison avec l'appui est telle que la poutre en se déformant peut prendre une inclinaison quelconque sur sa direction primitive.

On dit qu'une poutre est encastrée sur un appui quand sa liaison avec l'appui tend à réduire en ce point la déviation de la fibre neutre.

L'encastrement est parfait quand la déviation de la fibre

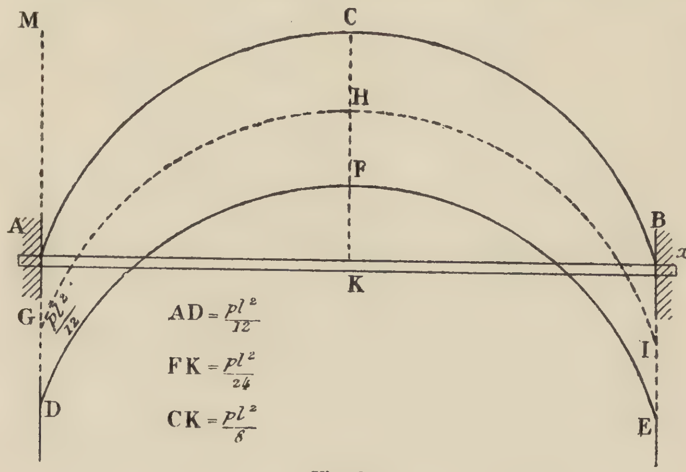


Fig. 20.

neutre sur l'appui est rigoureusement nulle. L'encastrement est *incomplet* ou *partiel* si la déviation de la fibre neutre, sans être nulle, est gênée par la liaison et limitée à une valeur inférieure à celle qu'elle prendrait si la poutre était posée sur l'appui.

Formule générale du moment fléchissant dans le cas d'un encastrement partiel. — Si nous considérons les équations du moment fléchissant relatives :

1° A la poutre posée sur appuis (fig. 19),

$$M = \frac{p}{2}(-lx + x^2);$$

2° A la poutre encastrée parfaitement sur ses appuis (fig. 17),

$$M = \frac{p}{2}(-lx + x^2) + \frac{pl^2}{12}$$

on reconnaît que les courbes qu'elles représentent sont identiques, mais que la seconde s'est élevée perpendiculairement à l'axe des x de la quantité $\frac{pl^2}{12}$.

L'encastrement incomplet donnerait lieu dans la théorie de la superposition des effets des forces, d'après ce qui précède, à une équation des moments fléchissants représentée par une parabole identique aux deux précédentes mais occupant une position intermédiaire

$$M = \frac{p}{2}(-lx + x^2) + \frac{pl^2}{\alpha}, \tag{29}$$

α étant un paramètre susceptible de varier depuis $\alpha = 12$ (poutres complètement encastrées) jusque $\alpha = \infty$ (poutres simplement posées) et tel que plus il est grand moins l'encastrement est parfait.

L'expression $\frac{pl^2}{\alpha}$ représente le moment fléchissant de la poutre sur l'appui, il est égal et de signe contraire au moment d'encastrement.

La figure 20 représente graphiquement les trois paraboles. La courbe ACB est la parabole relative à la poutre simplement posée. La courbe DFE est celle de la poutre complètement encastrée. La courbe GHI représente l'une des paraboles intermédiaires aux précédentes quand α a une valeur comprise entre 12 et l'∞.

Discussion de l'équation générale (*29*). — La parabole GHI mobile, quand α varie de 12 à ∞, dans l'espace DFEACB conserve une flèche constante égale à $\frac{1}{8}pl^2$.

Dans la position ACB (poutre simplement posée), la flèche $\frac{1}{8}pl^2$ est tout entière du même côté de AB. Dans la position DFE (poutre complètement encastrée), la flèche $\frac{1}{8}pl^2$ est partagée par l'axe AB en deux parties inégales l'une FK ou $\frac{1}{24}pl^2$

et l'autre $AD = \frac{1}{12} pl^2$.

L'amplitude du mouvement a donc été de :

$$CK - FK = \frac{1}{8} pl^2 - \frac{1}{24} pl^2 = \frac{1}{12} pl^2.$$

Dans ce mouvement, la parabole a occupé deux positions intéressantes :

1° Aux trois quarts de la course, la flèche est partagée en deux parties égales par l'axe AB et chaque partie a pour valeur $\frac{pl^2}{16}$. Dans ce cas $\alpha = 16$. Dans ce cas encore, bien que l'encastrement complet ne soit plus réalisé, le maximum du moment fléchissant passe par sa plus petite valeur. Cette valeur de α est vraiment remarquable car les efforts maxima ne sont que la moitié de ceux qui se produisent dans la poutre simplement posée et les 3/4 de ceux du cas de la poutre complètement encastrée;

2° A la moitié de la course, la flèche est partagée par l'axe AB en deux parties $\frac{pl^2}{12}$ et $\frac{pl^2}{24}$ dont la première est le double de l'autre, la plus grande ordonnée étant située au milieu de la portée, la plus petite sur les appuis. Cette situation est juste l'inverse de la position d'encastrement complet où la portion de flèche $\frac{pl^2}{24}$ est placée au milieu de la portée et l'ordonnée $\frac{pl^2}{12}$ sur l'appui. Ce cas est caractérisé par $\alpha = 24$.

Il présente cette particularité remarquable que le maximum du moment fléchissant a même valeur que dans l'encastrement complet, mais qu'au lieu d'être placé sur les appuis il est au milieu de la portée.

Les armatures de l'encastrement complet calculées avec ce maximum $\frac{1}{12} pl^2$ conviennent donc encore à ce cas.

En résumé, quand α varie de 12 (encastrement complet) à 24, le maximum du moment ne dépasse pas le maximum

$\frac{1}{12}pl^2$ correspondant à l'encastrement complet.

Quand α dépasse 24 et croît vers ∞, le maximum de moment croît de $\frac{pl^2}{12}$ à $\frac{pl^2}{8}$.

Emploi de l'acier. — Tant que l'*indice d'encastrement* α reste compris entre 12 et 24, l'emploi du fer dans les armatures calculées par la formule (25 *bis*) est suffisant puisque le maximum du moment fléchissant n'excède en aucun cas $\frac{pl^2}{12}$ qui a servi de base aux calculs des sections.

Mais dès que α dépasse 24 et croît vers ∞, le maximum du moment fléchissant dépasse $\frac{pl^2}{12}$ et croît vers $\frac{pl^2}{8}$. Le travail des barres calculées par la formule (25 *bis*) dépasse dès lors 12 *kg* par millimètre carré et pour retrouver la sécurité, sans changer la section des barres, il suffit de les constituer en acier qui pouvant travailler à 18 *kg* par millimètre carré, c'est-à-dire une demi-fois plus que le fer, permet de résister à des moments une demi-fois plus grands que $\frac{pl^2}{12}$, soit $\frac{pl^2}{8}$.

L'emploi des armatures en acier, sans changement de diamètre, s'impose donc dès que $\alpha > 24$. La dépense supplémentaire résultant de l'emploi de l'acier est d'ailleurs très faible.

On pourrait aussi, tout en conservant le fer, employer des barres supplémentaires au milieu de la portée, comme on emploie des plates-bandes dans les poutres entièrement métalliques, mais nous ne conseillons pas ce procédé pour les raisons énumérées plus haut et, en outre, parce que le poids supplémentaire du fer coûterait en général plus cher que l'excédent de dépense résultant de l'emploi de l'acier.

Règle générale pour le calcul des barres de résistance au moment fléchissant. — La section des armatures calculées avec la formule (25 *bis*) est suffisante dans tous les cas d'une

poutre posée sur deux appuis encastrée, non encastrée ou partiellement encastrée. On constituera les armatures en fer tant que l'indice d'encastrement restera compris entre 12 et 24 et on emploiera l'acier quand cet indice dépassera 24.

Calcul des barres pour résister à l'effort tranchant. — L'effort tranchant étant la dérivée du moment fléchissant conserve la même valeur

$$A = \frac{pl}{2} - px,$$

quelle que soit la position de la parabole.

Or, comme dans le mouvement de la parabole, l'ordonnée sur l'appui est maximum pour l'encastrement complet, $\alpha = 12$, cas où il est nécessaire d'employer des barres supplémentaires de longueur h aux appuis pour résister à l'effort tranchant, il en résulte que la longueur de ces barres diminuera au fur et à mesure que l'encastrement sera de moins en moins parfait, sans que l'on soit jamais dans l'obligation de mettre des barres de cette nature au milieu de la poutre, où croît le moment fléchissant, puisque, même lors du maximum en ce point, elles sont inutiles ainsi qu'on l'a vu plus haut (poutres simplement posées).

Il est intéressant de rechercher les variations de longueur de ces barres sur les appuis quand α varie et dans l'hypothèse où les barres des armatures ont été calculées à l'aide de la formule (25 *bis*). Le procédé de calcul est le même que celui déjà employé aux §§ C et D.

La section des barres des armatures est

$$2\,S = \frac{2\,\frac{pl^2}{12}}{Rh} \text{ ou } \frac{p}{Rh}\left(\frac{l^2}{6}\right).$$

En un point situé à la distance x_1 de l'appui, la caractéristique de l'encastrement étant α, la section strictement nécessaire pour résister au moment fléchissant est

$$2\,S_1 = \frac{2\left(\frac{pl^2}{\alpha} + \frac{1}{2}\,px_1^2 - \frac{1}{2}\,plx_1\right)}{Rh}$$
$$= \frac{p}{Rh}\left(\frac{2l^2}{\alpha} + x_1^2 - lx_1\right).$$

Au même point, la section nécessaire pour résister à l'effort tranchant est

$$S'_1 = \frac{p}{Rh}(lh - 2\,hx_1).$$

Il ne faudra pas de barres supplémentaires tant que l'on aura

$$\frac{p}{Rh} \cdot \frac{l^2}{6} \geqslant \frac{p}{Rh}\left(\frac{2l^2}{\alpha} + x_1^2 - lx_1\right) + \frac{p}{Rh}(lh - 2hx_1)$$

ou

$$x_1^2 - x_1(l + 2h) + lh + l^2\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{6}\right) \geqslant 0 \qquad \text{(d)}$$

d'où

$$x_1 = \frac{l + 2h \pm \sqrt{\left(\frac{5}{3} - \frac{8}{\alpha}\right)l^2 + 4h^2}}{2}. \qquad (30)$$

C'est la formule qui donne la longueur des barres supplémentaires. Ces barres disparaissent quand l'équation (d) a une racine nulle, c'est-à-dire pour

$$l.h + l^2\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{6}\right) = 0$$

ou

$$\alpha = \frac{2}{\frac{1}{6} - \frac{h}{l}}.$$

Or $\frac{h}{l}$ reste compris dans la pratique entre $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{24}$.

Pour $\frac{h}{l} = \frac{1}{12}$ on a $\alpha = 24$

$= \frac{1}{18}$ — $= 18$

$= \frac{1}{24}$ — $= 16.$

Les barres supplémentaires disparaissent donc dès que $\alpha = 16$, 18 ou 24 suivant les cas. Elles n'existent sûrement plus dès que $\alpha > 24$, c'est-à-dire au moment où l'usage de l'acier s'impose. Toutefois, comme il s'agit de petites longueurs, que l'encastrement est caractérisé par la quantité α dont la détermination repose sur des hypothèses, nous conserverons, pour éviter les surprises, la longueur constante h pour les barres tant que $\alpha \leqslant 24$ (h est la longueur relative à l'encastrement complet).

§ F. — *Détermination de α.*

On comprend que l'encastrement complet ($\alpha = 12$) ne peut pas être toujours réalisé. Il faut en effet pour qu'il ait lieu :

a) Que le poids du mur dans lequel la poutre pénètre soit suffisant pour empêcher le relèvement de l'about de la poutre.

b) Que la limite d'écrasement des matériaux sur l'appui ne soit pas atteinte.

Quand l'une de ces deux conditions ne pourra être remplie, l'encastrement sera partiel, α sera > 12.

Effets de l'encastrement sur le mur d'appui. — A son point d'entrée dans le mur, dans la section AE (fig. 21), la poutre est sollicitée :

1° Par le moment fléchissant en ce point $\frac{pl^2}{\alpha}$;

2° Par l'effort tranchant au même point $\frac{pl}{2}$.

Si l'on ne conserve de la poutre que la partie qui est logée dans le mur, cette partie sera évidemment sollicitée :

1° Par un couple égal à $\frac{pl^2}{\alpha}$ et de même sens ;

2° Par une force verticale $\frac{pl}{2}$

auxquels font équilibre :

Les réactions des appuis,

Le poids P du mur tributaire de la poutre.

Sous l'influence du couple $\frac{pl^2}{\alpha}$, il se produit un arc-boutement sur les surfaces AD et BC de la cavité AB du mur d'épaisseur $2b$. On peut concevoir en effet que sous l'influence du moment d'encastrement la moitié AD du mur est pressée par une force Q que nous supposerons appliquée au 1/6 de l'épaisseur à partir du parement et que l'autre moitié CB est soulevée par une force égale semblablement placée par rapport à l'autre parement.

Le moment de ces deux forces égales et contraires a pour valeur

$$Q \times \frac{4b}{3} \text{ la même que } \frac{pl^2}{\alpha}$$

d'où l'égalité

$$Q \times \frac{4b}{3} = \frac{pl^2}{\alpha}$$

ou

$$Q = \frac{3\,pl^2}{4\alpha b}. \qquad (31)$$

L'encastrement est limité par l'écrasement des matériaux sous la poutre. — La surface AD reçoit :

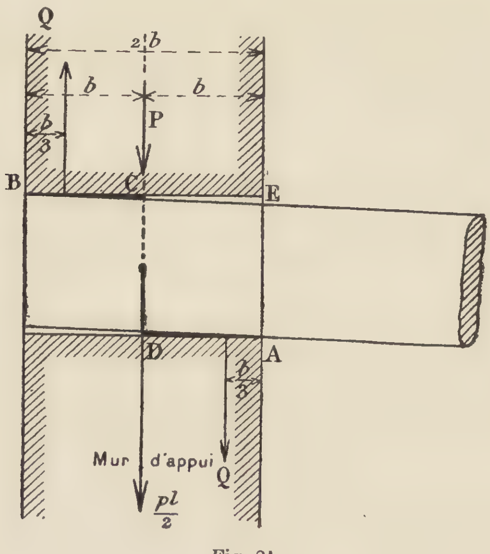


Fig. 21.

1° La compression due à la force Q dont le maximum a lieu au point A et a pour valeur par unité de surface

$$\frac{2\,Q}{bc}$$

c étant la largeur de la surface d'appui;

2° La compression due à l'effort tranchant $\frac{pl}{2}$ que nous sup-

posons uniformément répartie sur la longueur de l'about de la poutre et qui a pour valeur par unité de surface

$$\frac{pl}{4bc}.$$

La valeur par unité de surface du maximum de la compression, qui se produit en A, est

$$\frac{2Q}{bc} + \frac{pl}{4bc} \quad \text{ou} \quad \frac{8Q + pl}{4bc}.$$

Cet effort ne doit pas dépasser le coefficient de résistance des matériaux à la compression. Cette résistance est assez élevée, mais en raison des hypothèses que nous avons dû faire sur la position des forces, nous adopterons un coefficient assez bas, soit 25×10^4 par unité de surface.

Nous poserons donc

$$\frac{8Q + pl}{4bc} = 250000 \; kg,$$

d'où l'on tire

$$Q = \frac{10^6 \times b \,.\, c - pl}{8} \qquad (32)$$

et, en exprimant Q à l'aide de α par l'égalité (31), on tire

$$\alpha = \frac{6pl^2}{b(10^6 \times b \,.\, c - pl)}. \qquad (33)$$

Connaissant p, l, b et c, on en déduit facilement α, c'est-à-dire la valeur de l'encastrement que permet la résistance des matériaux, on peut aussi calculer Q.

L'encastrement est aussi limité par la condition que le mur situé au-dessus de la poutre ne soit pas soulevé. — Si la force Q calculée par la formule (32) était supérieure au poids P du mur tributaire de la poutre, il y aurait soulèvement de ce dernier. Dans ce cas le couple (Q, — Q) doit être remplacé par le couple (P, — P). Et comme P est calculé directement dans chaque cas, la formule (31) devient

$$P = \frac{3\,pl^2}{4\alpha b}$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{3\,pl^2}{4\,P\,.\,b}. \qquad (34)$$

Connaissant p, l, P, b, on déduit α.

Cas où Q $\leqslant$ P. Après avoir calculé :

a. P directement
b. Q par la formule (32).

Si l'on trouve Q $\leqslant$ P, α sera calculé par la formule (33). On remarque que cette valeur de α est fonction des deux quantités b et c qui sont à la disposition du constructeur et que α est d'autant plus faible que b et c sont plus grands.

Le constructeur peut, en effet, donner à b une longueur qui peut atteindre la moitié de l'épaisseur du mur d'appui et élargir la base d'appui par un *patin.*

Le patin est constitué par un élargissement de la poutre dans l'alvéole du mur, élargissement obtenu en disposant, sous l'armature inférieure et perpendiculairement à cette dernière, un faisceau de fers ronds de même diamètre que l'armature et noyés dans un bloc de béton construit en même temps que la poutre (fig. 22).

On peut même rechercher quelle est la longueur c qu'il faut donner au patin pour obtenir la valeur $\alpha = 24$ pour laquelle les fers calculés par la formule (25 *bis*) sont encore suffisants. Dans l'équation (33), on fera $\alpha = 24$ et l'on tirera

$$c = \frac{pl\,(l + 4b)}{4 \cdot b^2 \times 10^6}. \qquad (35)$$

Il convient de faire remarquer que l'accroissement de c, qui diminue la valeur de α et rend l'encastrement plus parfait, fait grandir Q et le rapproche ou lui fait dépasser la valeur P (voir équation 32). De sorte que c a pour limite, déduite de l'équation (32) où l'on remplace Q par P,

$$c_1 = \frac{8P + pl}{b \cdot 10^6}. \qquad (36)$$

Recherche pratique de α. — Voici les opérations à faire :

1° On calculera P directement à l'aide des éléments du projet ;

2° On donnera à b la valeur que l'on voudra eu égard aux nécessités de la construction, mais la plus grande possible ;

3° On calculera les deux valeurs c et c_1 par les équations 35) et (36);

4° Si $c < c_1$, on en déduira $\alpha = 24$;

5° Si $c_1 < c$, on calculera α par l'équation (34);

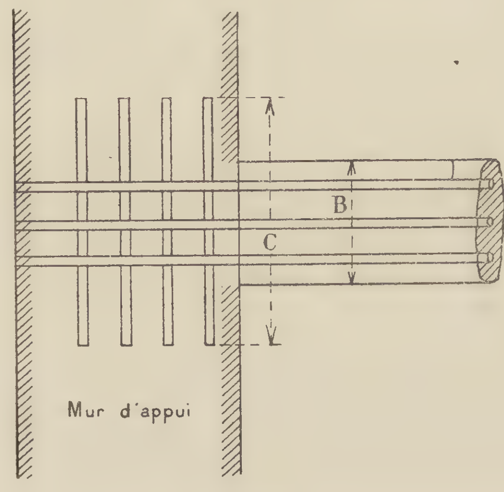


Fig. 22.

Remarque. — Il est clair que si dans la détermination de c et c_1 par les équations (35) et (36) on obtenait une valeur inférieure à B, largeur de la poutre, il conviendrait de remplacer c par B dans l'équation (33) et l'on obtiendrait une valeur de α inférieure à 24.

§ G. — *Déformation des poutres.*

Considérons dans cette déformation des poutres sous l'action des forces les deux éléments qui ont de l'intérêt dans la pratique, savoir : la flèche au milieu et le relèvement de l'about dans le mur.

Flèche au milieu. — Dans le cas de non encastrement, la flèche f au milieu est donnée par la formule

$$f = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EI}$$

qui est démontrée dans tous les ouvrages sur la résistance des matériaux.

Dans les poutres en ciment armé, adaptées à la construction des planchers et dont la portée n'excède pas 15 m, cette flèche calculée avec la résistance seule des deux armatures atteint plusieurs centimètres 0,05 m et même 0,10 m. Cette amplitude est largement atténuée par les deux motifs suivants :

a) L'encastrement n'est jamais nul,

b) La présence du béton qui prend une partie des efforts.

Il importe d'atténuer cet effet, qui rend la construction disgracieuse en relevant les coffrages en leur milieu d'une quantité égale à la flèche calculée avec le fer seul.

Dans le cas d'encastrement complet

$$f = \frac{1}{384} \frac{pl^4}{EI}$$

c'est-à-dire que la flèche au milieu n'est plus que le 1/5 de la précédente.

Dans le cas d'encastrement partiel, on pourrait trouver la valeur de la flèche en fonction de α, mais comme cette flèche est comprise entre les deux valeurs précédentes, il suffira dans chaque cas d'en faire une évaluation approximative.

Une bonne règle qui convient à tous les cas, qui donne un bon aspect à la construction et qui annihile les effets des flèches, est de donner aux poutres une courbure convexe par-dessus telle que le milieu de leur face inférieure soit relevé de 1/300e de la portée par rapport à l'horizontale des appuis.

Relèvement des abouts. — Quand une poutre est complètement encastrée, la déviation de la fibre neutre sur l'appui est rigoureusement nulle.

Quand une poutre est simplement posée, la déviation de la fibre neutre sur l'appui, ou l'angle φ qu'elle fait avec l'horizontale, est donnée par la formule

$$\text{tang } \varphi = \frac{1}{24} \cdot \frac{pl^3}{EI}.$$

Quand il s'agit de poutres dont la portée ne dépasse pas 15 *m* comme dans la construction des planchers en ciment armé, tang φ prend des valeurs atteignant 0,01 et même 0,02, en considérant les armatures seules.

Si l'on se reporte à la figure 21, on voit que le relèvement du point B peut atteindre

$$0{,}02\ b \text{ et même } 0{,}04\ b$$

ou pour $2b = 0{,}60\ m$, par exemple

$$0{,}006\ m \text{ et même } 0{,}012\ m.$$

Ce ne sont pas, à la vérité, de forts relèvements, mais ils entraîneraient quelques dislocations si des précautions n'étaient prises. Il faut ajouter que dans la pratique, ils sont atténués de près de moitié parce que le béton prend une forte partie des efforts et que l'encastrement n'est jamais nul. En sorte que l'on peut penser que même dans les plus grandes portées et les plus fortes charges, le relèvement du point B ne peut dépasser 0,010 et qu'en général dans les portées moyennes il se réduit à quelques millimètres.

La précaution serait de placer sur la poutre dans la région BC (fig. 21) une feuille de plomb de quelques millimètres d'épaisseur qui, par sa compression, ainsi que celle du mortier contigu, empêcherait toute dislocation et réaliserait l'encastrement partiel.

§ H. — *Détails divers.*

Nombre de fers composant les armatures. — Il y a lieu d'envisager les armatures continues et les barres supplémentaires.

En ce qui concerne les armatures continues, quand on connaît la section S de l'une d'elles, il est facile de trouver soit le nombre $\frac{N}{2}$, soit le rayon r des fers ronds qui doivent la composer, par la formule

$$\pi r^2 \times \frac{N}{2} = S$$

Comme nous avons vu plus haut qu'il est indispensable que le diamètre des barres soit voisin du 1/10 de la distance des armatures, on prendra donc pour r la valeur convenable et on en déduira la valeur de $\frac{N}{2}$.

D'autre part, il ne faut pas perdre de vue que le rapport de la section du béton à celle du fer doit être voisin de 25 ou 30 et que dès que ce rapport grandit, l'économie des poutres en béton de ciment armé diminue, tandis que l'économie augmente lorsque le rapport diminue.

En ce qui concerne les barres supplémentaires, aucune règle inflexible ne paraît présider au choix de leur nombre ou de leur diamètre.

Distribution des fers dans le béton. — Les fers ronds d'une même armature seront distribués dans un même plan horizontal en laissant entre eux un vide de 0,02 *m* à 0,04 *m*.

Le profil rectangulaire du béton enveloppera les deux armatures de telle façon que l'épaisseur de la couche qui recouvre les fers soit comprise entre 0,025 *m* et 0,04 *m*.

La dimension de 0,04 *m* paraît être un maximum qu'il est inutile de dépasser, mais dans certains cas où ce sont des fils de fer de petit diamètre qui entrent en jeu, on peut sans inconvénient descendre au minimum de 0,015 si besoin est.

En ce qui concerne les barres supplémentaires destinées à résister aux efforts tranchants, elles seront placées dans le plan diamétral horizontal de la poutre.

Conditions que doit remplir le béton. — Le béton n'est autre chose que du mortier de ciment. C'est à l'expérience de se prononcer sur ce point d'une façon définitive sur les conditions qu'il doit remplir. Le sable paraît pouvoir être grenu, pas trop fin. Le ciment de Portland y entrera pour 400, 500 ou 600 *kg* par mètre cube de sable. L'influence du dosage n'a pas encore été déterminée d'une façon très nette par des expériences probantes. Mais à partir de 400 *kg* et au-dessus,

le béton de ciment possède de sérieuses qualités de résistance; il remplit convenablement le but. La question est principalement de savoir si l'emploi d'un mortier à haut dosage, coûtant par suite plus cher, donne au béton un accroissement de résistance permettant de diminuer le coefficient m et par suite le poids du métal, si en un mot l'accroissement de la dépense en ciment est compensée par une diminution du poids des fers.

Nous avons assisté récemment aux épreuves d'un plancher en béton de ciment armé où l'on avait employé pour la fabrication du béton :

1° Du sable passé à la claie de façon qu'il ne contenait que des grains compris entre 2 *mm* et 10 *mm*;

2° 350 *kg* de ciment artificiel par mètre cube de sable.

Enduit sur béton. — Quand le béton a été mis en place dans des coffrages, la surface est rugueuse et peu agréable à l'œil. Si l'on a soin de *décoffrer* avant le séchage complet, on peut appliquer à la surface un léger enduit qui donne à la construction un meilleur aspect. Ce léger enduit de ciment avec sable fin adhère convenablement au béton grâce aux rugosités de la surface de ce dernier.

§ K. — *Résumé du chapitre.*

Nous allons rappeler succinctement les principes qui doivent présider aux calculs des poutres en ciment armé.

Le tableau suivant donne les principales formules relatives au calcul des armatures et des barres de résistance à l'effort tranchant.

POUTRES reposant sur deux appuis de niveau dans les conditions ci-dessous	ARMATURES pour résister au moment fléchissant		BARRES DE RÉSISTANCE à l'effort tranchant			OBSERVATIONS
	Section d'une armature	Nature du métal	Section	Longueur	Position	
Chargées de poids quelconques encastrées ou non . .	$S = \frac{M\ (1)}{Rh}$ (24)	Fer ou acier (2)	$S' = \frac{2A}{R}$ (24 *bis*)	à calculer dans chaque cas	à rechercher dans chaque cas	(1) M est le maximum du moment fléchissant
Chargées uniformément et encastrées complètement . .		Fer	$S' = \frac{pl}{12 \times 10^6}$ (26 *bis*)	h	à partir de chaque appui	(2) fer, avec $R = 12 \times 10^6$; acier, avec $R = 18 \times 10^6$.
Chargées uniformément et simplement posées. . .	$S = \frac{pl^2}{144 \times 10^6 \times h}$ (25 *bis*)	Acier	$S' = \frac{ph}{18 \times 10^6}$ (28)	$4\ h$	Au milieu de la portée (3)	
Chargées uniformément et partiellement encastrées .		En fer, tant que $\alpha \leqslant 24$; en acier quand $\alpha > 24$	$S' = \frac{pl}{12 \times 10^6}$ (26 *bis*)	h, tant que $\alpha \leqslant 24$; nulle, pour $\alpha > 24$	à partir de chaque appui	(3) Ces barres peuvent être supprimées sans inconvénient.

Les poutrelles et hourdis dont les armatures traversent de part en part les poutres d'appui seront considérées comme encastrées complètement.

Les poutrelles et poutres qui pénètrent dans les murs d'appui feront l'objet de la recherche du coefficient α à l'effet de savoir si les armatures doivent être en fer ou en acier et s'il y a lieu de leur donner ou non des barres de résistance à l'effort tranchant.

Le calcul de α se déduit rapidement de la connaissance de P, b, p et l par les formules

$$c = \frac{pl\,(l + 4b)}{4\,b^2 \times 10^6} \qquad (35)$$

$$c_1 = \frac{8P + pl}{b\,.\,10^6} \qquad (36)$$

la plus petite des deux quantités c ou c_1 étant la largeur du patin d'appui de la poutre sur le mur.

Si $c < c_1$, on en conclut de suite $\alpha = 24$.

Si $c > c_1$, on calculera α par l'équation

$$\alpha = \frac{3\,pl^2}{4Pb}\,. \qquad (34)$$

Si c ou $c_1 < B$, on calculera α par l'équation

$$\alpha = \frac{6\,pl^2}{b\,(10^6 \times b \times c - pl)}. \qquad (33)$$

La longueur des barres de résistance à l'effort tranchant sera h pour $\alpha \leqslant 24$ et nulle pour $\alpha > 24$.

Les poutres et poutrelles doivent recevoir au moment de leur confection une courbure supérieure dont la flèche est égale au 1/300e de la portée.

La face supérieure des poutres ou poutrelles noyée dans les murs d'appui paraît devoir, par mesure de précaution, être recouverte d'une plaque de plomb de quelques millimètres d'épaisseur.

Le diamètre des fers des armatures sera pris très voisin du 1/10 de la distance verticale h qui sépare les axes des armatures.

Le rectangle du profil du béton débordera, sur tout son pourtour, le rectangle-enveloppe des armatures de la quantité 0,025 à 0,040 *m*, de façon que le rapport de la section du béton à celle du métal soit voisin du nombre 25 sans le dépasser autant que possible.

La distance libre entre les fers dans chaque armature sera comprise entre 0,025 et 0,040 *m*.

Le béton sera dosé dans la proportion de $1 m^3$ de sable pour 400 *kg* de ciment Portland artificiel, au moins.

Il pourra être recouvert d'un léger enduit avant dessiccation complète.

Il ne faut pas perdre de vue, enfin, que des expériences sont nécessaires pour fixer un certain nombre de données numériques qui restent encore indécises et que l'on devra agir avec prudence dans les calculs de planchers en ciment armé.

CHAPITRE IV

EXPÉRIENCES SUR LES POUTRES EN BÉTON DE CIMENT ARMÉ

Expériences d'Asnières. — Le numéro d'octobre 1897 du journal *le Ciment* contient la relation des expériences faites dans l'usine de M. Ed. Coignet, à Asnières, par les soins de M. Leconte, directeur de cette usine, sur quatre poutres en béton de ciment armé, à deux armatures symétriques, construites par la Société pour les constructions en ciment armé.

Ces expériences sont, à notre connaissance, les premières faites sur des poutres de cette nature, et, à ce titre, elles méritent d'être rapportées, car elles contiennent des résultats intéressants.

Profils des poutres. — Les poutres à essayer avaient les quatre profils ci-dessous (fig. 23) :

Deux d'entre elles étaient constituées avec des barres

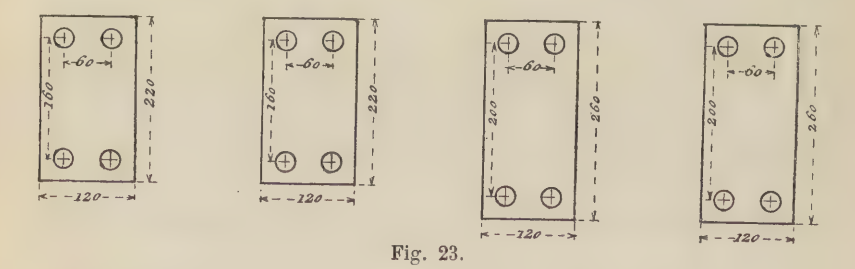


Fig. 23.

rondes de 20 *mm* de diamètre, les deux autres avec des barres de 16 *mm*. Dans deux poutres, les armatures étaient distantes de 160 *mm* et dans les deux autres de 200 *mm*. La distance des barres des armatures était uniformément de 60 *mm*.

Le prisme en béton de ciment était uniformément circonscrit au prisme des axes des quatre barres, à la distance de 30 *mm*.

Les barres étaient reliées entre elles dans deux plans hori-

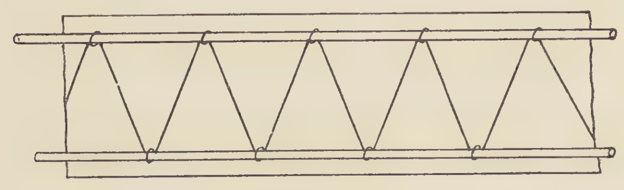


Fig. 23 *bis*.

zontaux et deux plans verticaux par de petits fers simplement ligaturés comme le représente la figure 23 *bis*.

Caractéristiques des poutres. — Le tableau qui suit résume les traits caractéristiques des poutres soumises aux essais rapportés par M. de Tedesco.

		POUTRE N° 1	POUTRE N° 2	POUTRE N° 3	POUTRE N° 4
Barres	Nombre	4	4	4	4
	Diamètre	20 *mm*	16 *mm*	20 *mm*	16 *mm*
	Distance des armatures	160 »	160 »	200 »	200 »
	Distance horizontale des barres	60 »	60 »	60 »	60 »
Béton	Section	220 × 120	220 × 120	260 × 120	260 × 120
	Kg de portland par m^3 de sable	500	500	500	500
	Age au moment des essais	30 jours	30 jours	30 jours	30 jours
Poids par mètre courant des poutres		68 *kg*	65 *kg*	79 *kg*	75 *kg*
Rapport de la section des fers à la section totale		$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{39}$
Moments d'inertie	Armatures I	0,00000807	0,00000516	0,00001260	0,00000807
	Béton I'	0,00010648	0,00010648	0,00017576	0,00017576

Les poids par mètre courant ont été calculés en attribuant au béton de ciment une densité de 2200 *kg* par mètre cube.

Les moments d'inertie des armatures ont été calculés par la formule

$$I = 4\left[\frac{\pi r^4}{4} + \pi r^2 \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

dans laquelle r est le rayon des barres et h la distance d'axe en axe des armatures.

Après simplifications, cette formule devient

$$I = \pi r^2 (r^2 + h^2)$$

Et comme r^2 est négligeable devant h^2, on peut l'écrire plus simplement

$$I = \pi r^2 h^2$$

Les moments d'inertie du béton ont été calculés par la formule

$$I' = \frac{BH^3}{12}$$

dans laquelle B est la largeur et H la hauteur de la section droite.

Mode des essais. — Les poutres étaient simplement posées sur deux appuis de niveau distants de 6,50 *m*. Dans cette situation, elles furent chargées, en leur milieu, d'un poids isolé allant en croissant. Les flèches prises par les poutres étaient soigneusement mesurées.

L'accroissement des poids fut poussé jusqu'aux premières fissures apparues à la surface du béton. Puis on les fit décroître tout en continuant à mesurer les flèches correspondantes.

Sur une feuille de dessin, on traça, à grande échelle, le diagramme représentant les variations de la flèche rapportées aux variations des charges.

Dispositions prises pour les essais. — Le mode de chargement était remarquable par sa simplicité. Un fléau CD (fig. 23 *ter*) équilibré au départ des expériences, tournait librement autour d'un axe fixe C. Il était engagé dans un étrier EF embrassant la poutre en son milieu et s'appuyait sur lui. A son extrémité, il portait un récipient D que l'on pouvait remplir d'eau. On avait disposé les points E et D de façon que la distance EC n'était que le vingtième de la distance DC. De sorte que

si l'on versait un litre d'eau dans le récipient D, l'effort exercé sur l'étrier par le levier était de 20 *kg*. Inversement, en ouvrant le robinet du récipient, s'il s'écoulait un litre d'eau,

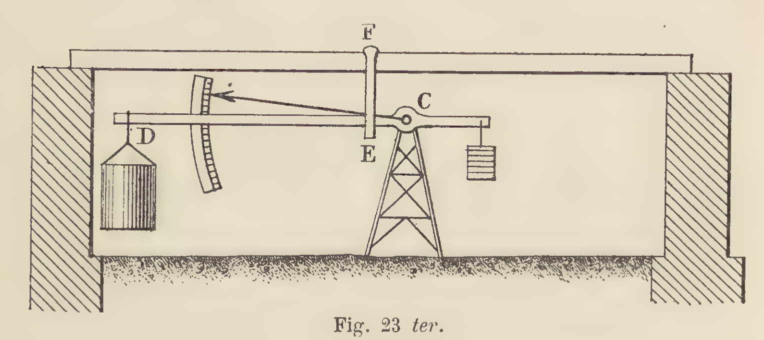


Fig. 23 *ter*.

la poutre était déchargée de 20 *kg*. L'augmentation, comme la diminution, des poids au milieu de la poutre se faisait donc sans secousse.

Les flèches étaient mesurées au dixième de millimètre par un index relié à l'axe de rotation du levier et se déplaçant le long d'une échelle graduée.

Résultats des essais. — Voici d'ailleurs les valeurs des flèches réelles obtenues pour différents poids placés au milieu des poutres :

Poutre n° 1.

Charges au milieu.	100	300	350	1 300	1 800 *kg*
Flèches réelles . . .	1,3	7	8,3	32,4	62,1 *mm*

Poutre n° 2.

Charges au milieu.	140	500	600	890	1 150 *kg*
Flèches réelles . . .	0,4	11	14,8	26	32,4 *mm*

Poutre n° 3.

Charges au milieu.	220	420	500	1 709	1 856 *kg*
Flèches réelles . . .	3	5,8	6,9	30	35 *mm*

Poutre n° 4.

Charges au milieu.	100	200	850	1 550 *kg*
Flèches réelles.	1	3,2	19,6	50 *mm*

Ces résultats, convenablement interprétés, ainsi que nous l'expliquerons plus loin, permettent de trouver, comme l'a fait M. de Tedesco :

1° Le travail réel du fer

et, comme nous l'avons fait,

2° Le travail réel du béton de ciment ;

3° Le coefficient m ou fraction du moment total des forces agissant sur le système hétérogène, à laquelle fait face le système des armatures, considéré comme s'il était seul (voir, au sujet de ce coefficient m, le chapitre Ier de la présente étude).

Coefficient m. — La connaissance de ce coefficient présente une grande importance puisqu'elle permet de calculer immédiatement les armatures des poutres en béton de ciment armé ainsi que nous l'avons expliqué précédemment. Or, son calcul est extrêmement simple.

Soit une poutre simplement posée sur deux appuis et chargée d'un poids P en son milieu (fig. 23 *quater*).

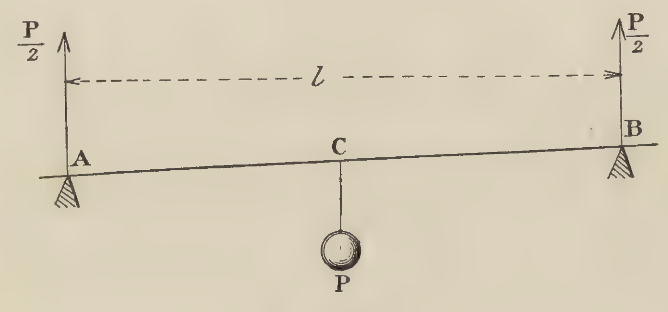


Fig. 23 *quater*.

Soit l, la distance des appuis.

Sous l'action du poids P, les réactions des appuis sont toutes deux égales à $\frac{P}{2}$, tout se passe symétriquement par rapport au milieu de la poutre et, entre A et C, le moment

fléchissant au point situé à une distance x de l'appui A a pour valeur

$$M = \frac{P}{2} \times x$$

Si l'on désigne par y les ordonnées de la fibre neutre déformée sous l'action du poids P par rapport à l'axe AB, on a l'équation d'équilibre dans la section x :

$$EI. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{2} \times x$$

Il faut intégrer deux fois pour avoir l'expression de y en fonction de x, c'est-à-dire l'équation de la déformation de la fibre neutre

$$EI. \frac{dy}{dx} + C = \frac{Px^2}{4}$$

$$EIy + Cx + C' = \frac{Px^3}{12}$$

E est le coefficient d'élasticité de la matière,
I le moment d'inertie de la poutre au point x,
C et C′ deux constantes à déterminer.

Pour fixer ces deux constantes, nous remarquerons : 1° que les appuis étant fixes, on doit avoir, au point A, $y = 0$ en même temps que $x = 0$, ce qui permet de tirer de la dernière équation $C' = 0$; 2° qu'au milieu de la poutre, au point $x = \frac{l}{2}$, en raison de la symétrie, la tangente doit être horizontale, c'est-à-dire que $\frac{dy}{dx} = 0$; ce qui permet de tirer de l'avant-dernière équation

$$C = \frac{pl^2}{16}$$

En transportant les valeurs de C et C′ dans la dernière équation, elle devient

$$EIy + \frac{Pl^2}{16} x = \frac{Px^3}{12}$$

C'est l'équation de la fibre neutre, après la déformation, les abscisses étant comptées à partir du point A

Le maximum de la flèche f a lieu au milieu de la portée, pour $x = \frac{l}{2}$, et sa valeur est donnée par

$$\mathrm{EI}f + \frac{\mathrm{P}l^3}{32} = \frac{\mathrm{P}l^3}{96}$$

d'où

$$f = \frac{\mathrm{P}l^3}{48\ \mathrm{EI}} \tag{37}$$

Quand il s'agit d'une poutre homogène prismatique, à section constante, le moment d'inertie I est constant d'un bout à l'autre de la poutre.

Quand il s'agit en outre d'une poutre en fer, le coefficient E est aussi constant dans certaines limites. D'après les expériences de Hodgkinson, rapportées par M. Bresse dans sa *Mécanique appliquée*, t. I, p. 391, faites sur des tiges de fer de bonne qualité, la valeur du coefficient d'élasticité E pour l'extension du fer est en nombre rond de 2×10^{10}, le mètre carré étant pris pour unité de surface et le kilogramme de fer pour unité de force, tant que les charges ne dépassent pas 15 *kg* par millimètre carré. Au delà de cette limite, le coefficient E décroît avec une grande rapidité. M. Bresse ajoute qu'en ce qui concerne la compression du fer, le coefficient d'élasticité est le même que celui de l'extension.

Dès lors, pour une poutre en fer de section constante, tant que l'effort moléculaire ne dépasse pas 15 *kg* par millimètre carré, la formule (37) possède un coefficient constant

$$\frac{l^3}{48\ \mathrm{EI}} \text{ ou } \frac{l^3}{96 \times 10^{10} \times \mathrm{I}}$$

et peut s'écrire sous cette autre forme

$$f = \frac{l^3}{96 \times 10^{10} \times \mathrm{I}} \cdot \mathrm{P} \tag{38}$$

De cette expression de la flèche, il résulte immédiatement qu'elle est proportionnelle au poids placé au milieu de la portée.

Il en résulte aussi qu'un accroissement df de la flèche est proportionnel à l'accroissement $d\mathrm{P}$ du poids correspondant.

En effet, si P devient $P + dP$ et que la flèche f prend la valeur $f + df$, d'après la formule (38) on a entre $P + dP$ et $f + df$ la relation

$$f + df = \frac{l^3}{96 \times 10^{10} \times I} (P + dP)$$

Si l'on retranche de cette dernière l'équation (38), on obtient

$$df = \frac{l^3}{96 \times 10^{10} \times I} \times dP$$

D'où

$$\frac{df}{dP} = \frac{f}{P} = \frac{l^3}{96 \times 10^{10} \times I}$$

ce qu'il fallait établir

Ainsi donc pour une poutre droite en fer de section constante posée sur deux appuis de niveau et chargée de poids en son milieu, à un accroissement de poids correspond un accroissement de la flèche donné par la formule (38), et réciproquement tout accroissement de la flèche est dû à un poids additionnel placé au centre de la poutre qui se calcule par la même formule.

Passons maintenant à l'examen de la poutre en ciment armé à deux armatures symétriques.

Prise dans son ensemble, cette poutre présente une égale flexion pour le fer et le ciment, c'est-à-dire que les flèches prises par le prisme total de la poutre sont égales aux flèches respectives du fer et du béton de ciment. Il ne peut en être autrement puisque le fer et le béton sont intimement liés tant qu'aucune trace de désagrégation n'apparaît.

En particulier, les armatures métalliques maintenues à distance constante par leur enveloppe de béton, absolument comme par une âme métallique, prennent les mêmes flèches que la poutre totale et l'accroissement de la flèche à un moment donné correspond à un accroissement de poids donné par la formule (38). Et cela est d'autant plus vrai dans l'espèce, c'est que les barres qui constituent la partie métallique sont de même forme que celles expérimentées par Hogd-

kinson et que par suite le coefficient E est bien déterminé.

Si donc nous supposons une poutre en ciment posée sur deux appuis, déjà chargée de poids en son milieu et possédant une certaine flèche, si nous ajoutons au milieu un poids P, la flèche prendra un accroissement f_r, accroissement *réel.*

Si les armatures seules travaillaient, c'est-à-dire si l'on faisait abstraction du béton, la formule (38) donnerait l'accroissement *théorique* f_t de la flèche correspondant à l'accroissement P du poids au milieu.

$$f_t = \frac{l^3}{96 \times 10^6 \times 1} \times \text{P}.$$

Ainsi que nous l'avons déjà expliqué, le béton qui enchâsse le fer travaille en même temps que ce dernier prend pour son compte une partie des efforts. L'accroissement f_t n'est donc pas réalisé en fait, mais il se produit réellement un accroissement f_r tel que

$$f_r < f_t$$

Sous cet accroissement réduit f_r, le fer ou le système des armatures travaille évidemment moins que s'il supportait seul l'accroissement P du poids. De telle sorte qu'il n'en supporte qu'une partie π donnée par la même formule (38).

$$f_r = \frac{l^3}{96 \times 10^{10} \times 1} \times \pi$$

En divisant membre à membre ces deux dernières égalités, on tire la relation

$$\frac{f_r}{f_t} = \frac{\pi}{\text{P}}$$

Mais la fraction $\frac{\pi}{\text{P}}$ représente précisément la portion du poids additionnel qui donne lieu pour le système des armatures à l'accroissement de sa flèche, c'est la part que prend le fer dans le travail total, c'est aussi le coefficient m que nous avons défini au chapitre Ier.

La formule précédente s'écrit donc encore

$$\frac{f_r}{f_t} = m \qquad (39)$$

Les expériences faites sur les quatre poutres à l'usine d'Asnières permettent de trouver immédiatement ce coefficient m.

Les accroissements réels f_r ont été mesurés directement. Les accroissements théoriques f_t se déduisent de la formule (38) en y introduisant les accroissements des poids.

Prenons comme exemple la poutre n° 1. Pour un accroissement de 100 *kg* au milieu, on a trouvé que l'accroissement de la flèche avait été de 1,3 *mm*. L'accroissement théorique de la flèche correspondant est donné par la formule (38).

$$f_t = \frac{(6{,}50\ m)^3}{96 \times 10^{10} \times 0{,}00000807} \times 100\ kg = 3{,}5\ mm$$

On tire ainsi

$$m = \frac{1{,}3}{3{,}5} = 0{,}37$$

Les tableaux suivants donnent les valeurs de m pour les diverses expériences :

Poutre n° 1.

Charges au milieu.	100	300	350	1 300	1 800 *kg*
Flèches réelles . . .	1,3	7	8,3	32,4	62,1 *mm*
Flèches théoriques .	3,5	10,6	12,4	46,1	63,8 »
m.	0,37	0,66	0,67	0,70	0,97

Poutre n° 2.

Charges au milieu.	140	500	600	890	1 150 *kg*
Flèches réelles. . .	0,4	11	14,8	26	32,4 *mm*
Flèches théoriques.	7,8	27,7	33,2	49,3	63,8 »
m.	0,05	0,40	0,45	0,53	0,51

Poutre n° 3.

Charges au milieu.	220	420	500	1 709	1 856 *kg*
Flèches réelles. . .	3	5,8	6,9	30	35 *mm*
Flèches théoriques.	5	9,5	11,4	38,6	42,1 »
m.	0,60	0,61	0,60	0,78	0,83

Poutre n° 4.

Charges au milieu	100	200	850	1 550 *kg*
Flèches réelles.	1	3,2	19,6	50 *mm*
Flèches théoriques	3,5	7,1	30,1	54,9 »
m.	0,28	0,45	0,65	0,91

Travail réel du fer. — Nous avons vu que l'application de la formule (38) n'est légitime qu'autant que le travail réel du fer ne dépasse pas 15 *kg* par millimètre carré. Il convient donc de calculer ce travail qui est donné par la formule générale

$$R \times \frac{I}{v} \; M.\, m$$

ou

$$R = \frac{M.\, m}{\frac{I}{v}} \qquad (39\ bis)$$

dans laquelle M est le moment fléchissant maximum de toutes les forces qui, à un instant donné, agissent sur la poutre, y compris le poids propre ;

v est la distance de la fibre métallique la plus éloignée à l'axe neutre ; ici $v = \frac{h}{2} + r$

m est le coefficient de réduction précédemment calculé.

Nous remarquerons que le poids propre de la poutre agit de la même façon, au point de vue des efforts, que si la moitié de ce poids était concentrée au milieu.

Opérons le calcul de R dans le cas de la poutre n° 1 pour la première charge d'épreuve (100 *kg*) placée en son milieu.

Le poids mort de la poutre est de 6,50 *m* $\times$ 68 *kg* $= 442$ *kg* agissant de la même façon qu'un poids de $\frac{442}{2}$ $= 221$ *kg* placé au milieu.

Le moment fléchissant maximum a lieu au milieu de la portée et il a pour valeur

$$M = \frac{221 + 100}{4} \times 6{,}50\ m = 522\ kgm$$

L'application de la formule (39) donne ainsi

$$R = \frac{522 \times 0{,}37}{\frac{0{,}00000807}{0{,}09}} = 2{,}15\ kg \text{ par } mm^2$$

En appliquant le procédé de calcul de R à tous les cas

donnés par les expériences, il est facile de s'assurer que les trois premiers de chaque poutre sont les seuls donnant une valeur de R ne dépassant pas 15 *kg*. Voici ces résultats :

Poutre n° 1.

Charge au milieu. . .	100	300	350 *kg*
m.	0,37	0,66	0,67
R.	2,15	6,22	6,93 *kg* par mm^2

Poutre n° 2.

Charge au milieu. . .	140	500	600 *kg*
m.	0,05	0,40	0,45
R.	0,50	8,06	10,35 *kg* par mm^2

Poutre n° 3.

Charge au milieu. . .	220	420	500 *kg*
m.	0,60	0,61	0,60
R.	4,07	5,85	6,44 *kg* par mm^2

Poutre n° 4.

Charge au milieu. . .	100	200	850 *kg*
m.	0,28	0,45	0,65
R.	2,09	4,35	15,47 *kg* par mm^2

Il résulte de ces expériences que la valeur de *m* ne dépasse pas la valeur de 0,67, quand le travail réel du fer reste compris dans les limites de 15 *kg* par millimètre carré.

Corrections à faire subir aux formules des chapitres précédents. — Nous avons admis au cours de cette étude $m = 0,60$.

C'est qu'en effet en prenant les chiffres donnés par M. de Tedesco dans le numéro du 25 octobre du *Ciment*, le rapport des flèches ne dépasse pas 0,60. Mais les calculs de la flèche théorique f_t ne sont pas exacts parce que les moments d'inertie I présentent des erreurs.

Une faible erreur dans la valeur de *m* donne lieu à des différences sensibles dans les sections des armatures.

Nous calculons en effet les armatures avec la formule simple.

$$Rsh = M \qquad (24)$$

Au lieu de prendre la formule exacte.

$$\frac{Rsh^2}{2} = m.\ M\left(\frac{h}{2} + 2\right) \qquad (21)$$

Et nous avons vu, chapitre Ier, § E, 3e cas, que

$$\frac{S_{24} - S_{21}}{S_{21}} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{2r}{h}\right) - 1$$

ou, en supposant que $\frac{2r}{h} = \frac{1}{10}$,

$$\frac{S_{24} - S_{21}}{S_{21}} = \frac{9}{10\,m} - 1$$

D'où l'on tire

$$S_{21} \text{ ou section réelle} = \frac{10}{9}\, m.\ S_{24}.$$

La section donnée par la formule (24)

$$S_{24} = \frac{M}{Rh}$$

doit donc être multipliée par le coefficient $\frac{10}{9}\, m$ pour obtenir la section exacte S_{21}. On obtient encore le résultat réel en divisant R de la formule (24) par $\frac{10}{9}.\ m$, c'est-à-dire qu'au lieu de prendre $R = 8 \times 10^6$, on peut lui donner la valeur

$$\frac{8 \times 10^6}{\frac{10}{9} \times m} \text{ ou } \frac{7{,}2 \times 10^6}{m}$$

Pour diverses valeurs de m, on dresse le tableau suivant :

$m = 0{,}60$	$R = 12{,}0 \times 10^6$ *kg*
$m = 0{,}65$	$R = 11{,}1 \times 10^6$ »
$m = 0{,}70$	$R = 10{,}3 \times 10^6$ »
$m = 0{,}72$	$R = 10{,}0 \times 10^6$ »
$m = 0{,}75$	$R = 9{,}6 \times 10^6$ »
$m = 0{,}80$	$R = 9{,}0 \times 10^6$ »
$m = 0{,}85$	$R = 8{,}5 \times 10^6$ »
$m = 0{,}90$	$R = 8{,}0 \times 10^6$ »

Ainsi donc les valeurs de R qu'il faut prendre pour appliquer avec exactitude la formule simple (24) vont rapidement en décroissant quand m augmente.

La valeur de R correspondant à la valeur de $m = 0{,}67$ trouvée dans les expériences ci-dessus est $R = 10{,}7 \times 10^6$.

Mais pour éviter des mécomptes, nous considérerons $m = 0{,}80$ et nous attribuerons à R la valeur 9×10^6.

Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur cette valeur du coefficient m qui est variable avec les conditions d'établissement de la poutre. Mais en attendant considérons ce chiffre comme acceptable aux lieu et place de la quantité $R = 12 \times 10^6$ que nous avons précédemment employée.

Donc nous continuerons à accepter la formule (24) mais avec

$$R = 9 \times 10^6 \text{ pour le fer, } \frac{2r}{h} \text{ étant voisin de } \frac{1}{10},$$

sauf modifications nouvelles quand des expériences en cours permettront plus de précision.

Dans cette nouvelle hypothèse et avec l'emploi du fer, la formule 25 *bis* devient

$$S = \frac{pl^2}{108 \times 10^6 \times h} \qquad (25 \textit{ bis})$$

et la formule 26 *bis*

$$S' = \frac{pl}{9 \times 10^6} \qquad (26 \textit{ bis})$$

Pour les poutres uniformément chargées et simplement posées, on fera usage de

$$S = \frac{pl^2}{72 \times 10^6 \times h} \qquad (27 \textit{ bis})$$

Nous n'emploierons pas pour l'acier de formule différente de celle du fer jusqu'à ce que de nouvelles expériences aient fait connaître le coefficient maximum R à appliquer.

A la fin de ce chapitre, nous rectifierons en conséquence le tableau donné à la fin du chapitre précédent.

Coefficient de sécurité. — La base de nos calculs repose sur le travail maximum du fer de 8 *kg* par millimètre carré.

Il eût été intéressant de rechercher la charge produisant ce travail et le rapport entre cette charge et celle qui produit la première fissure. Mais les expériences citées ont été faites avec des accroissements de poids trop considérables pour en tirer quelque conclusion. Les poutres n° 2 et n° 4 se prêtent seules à cette opération, en employant pour la poutre n° 4 la voie de l'interpolation.

Pour la poutre n° 2, la charge donnant pour le travail réel du fer le chiffre de 8 *kg* par millimètre carré se compose

Du poids placé au milieu.	500 *kg*
et du poids total de la poutre divisé par deux $\frac{65 \times 6,5}{2}$	211 »
Total	711 *kg*

A la rupture, on avait :

Poids placé au milieu.	1 150 *kg*
Demi-poids de la poutre.	211 »
Total	1 361 *kg*

Le rapport $\frac{711}{1\,361} = 0,52$

Pour la poutre n° 4, en employant le procédé d'interpolation, puis le même procédé de calcul, on trouverait 0,36.

Soit une moyenne de 0,44.

Donc la charge totale correspondant au travail réel maximum adopté pour le fer est en général inférieure à la moitié de la charge totale produisant la première fissure dans la poutre en béton de ciment armé.

Mais cette conclusion demande à être précisée, si c'est possible, par de nouvelles expériences et nous ne la donnons que sous les plus expresses réserves.

Elle est aussi en désaccord avec un tableau donné dans le même sens par M. de Tedesco dans le numéro du 15 octobre 1897 du journal *le Ciment*, parce qu'il n'envisage que les surcharges sans tenir compte du poids propre de la poutre.

Recherche de K. — La recherche de K offre également un grand intérêt et peut s'effectuer au moyen des données des expériences.

La valeur de R qui a été calculée directement à l'aide de la formule (39), peut aussi se déduire de la formule (13) du chapitre Ier.

$$R = \frac{KMv}{KI + I'}$$

En résolvant cette équation par rapport à K, il vient

$$K = \frac{RI}{Mv - RI}.$$

Si dans cette dernière, on transporte la valeur de R donnée par la formule (39 *bis*)

$$R = \frac{Mm}{\frac{I}{v}}$$

on tire facilement après réduction des termes

$$K = \frac{m}{1 - m} \cdot \frac{I'}{I} \tag{40}$$

formule simple et d'un calcul rapide. Son application donne lieu au tableau suivant :

Poutre n° 1.

Charge au milieu.	100	300	350 *kg*
m	0,37	0,66	0,67
K	8	26	27

Poutre n° 2.

Charge au milieu.	140	500	600 *kg*
m	0,05	0,40	0,45
K	»	14	17

Poutre n° 3.

Charge au milieu.	220	420	500 *kg*
m	0,60	0,61	0,60
K	21	21	21

Poutre n° 4.

Charge au milieu.	100	200	850 *kg*
m	0,28	0,45	0,65
K	9	18	40

La formule (40) montre que le coefficient K, pour une même poutre, est croissant avec m. En effet, quand m augmente, le numérateur m de la fraction $\frac{m}{1 - m}$ augmente et le dénominateur diminue, donc la fraction augmente.

Sauf cette loi générale de la variation de K, il est difficile de tirer d'autre conclusion des chiffres ci-dessus qui oscillent dans de très larges limites et qui semblent montrer que le coefficient d'élasticité du béton n'est pas constant, mais varie rapidement avec les efforts.

Travail du béton. — Il est aussi très intéressant de rechercher à l'aide des expériences précitées le travail maximum du béton que nous avons désigné par R'.

Ce travail est donné par la formule générale

$$R' \times \frac{I'}{v'} = M\,(1 - m)$$

ou

$$R' = \frac{M\,(1 - m)}{\frac{I'}{v'}} \qquad (41)$$

dans laquelle :

M représente, comme précédemment, le moment fléchissant maximum de toutes les forces qui à un moment donné agissent sur la poutre.

v' la distance de la fibre du béton la plus éloignée de l'axe neutre, ici $v' = \frac{H}{2}$

En divisant la formule (41) par la formule (39 *bis*) on obtient :

$$\frac{R'}{R} = \frac{\frac{1 - m}{\frac{I'}{v'}}}{\frac{m}{\frac{I}{v}}} = \frac{1 - m}{m} \cdot \frac{I}{I'} \cdot \frac{v'}{v}$$

ou

$$R = \frac{1 - m}{m} \cdot \frac{I}{I'} \cdot \frac{\frac{H}{2}}{\frac{h}{2} + r} \cdot R$$

Et en tenant compte de la formule (40) on a

$$R' = \frac{1}{K} \cdot \frac{\frac{H}{2}}{\frac{h}{2} + r} \cdot R$$

ou

$$R' = \frac{R \times \frac{H}{2}}{K \times \left(\frac{h}{2} + r\right)} \qquad (42)$$

On aurait pu obtenir immédiatement ce résultat en divisant la formule (14) par la formule (13).

Toutes les quantités qui entrent dans cette valeur de R′ ont été trouvées précédemment et par suite il est facile de dresser le tableau suivant :

Poutre n° 1.

Charge au milieu. . .	100	300	350	*kg*
m.	0,37	0,66	0,67	
R′.	32	29	31	*kg* par *cm*²

Poutre n° 2.

Charge au milieu. . .	140	500	600	*kg*
m.	0,05	0,40	0,45	
R′.	»	70	74	*kg* par *cm*²

Poutre n° 3.

Charge au milieu. . .	220	420	500	*kg*
m.	0,60	0,61	0,60	
R′.	23	33	36	*kg* par *cm*²

Poutre n° 4.

Charge au milieu. . .	100	200	850	*kg*
m.	0,28	0,45	0,65	
R′.	29	29	45	*kg* par *cm*²

Ainsi que l'on peut s'en rendre compte, la valeur de R′ varie dans des limites assez étendues, mais va généralement en croissant avec les charges.

Conclusions générales. — Les expériences précédentes, encore trop peu nombreuses à l'égard des poutres à deux

armatures symétriques, montrent que, le fer travaillant réellement au plus à 15 *kg*, le béton prend une partie des efforts. Cette partie est loin d'être constante et semble diminuer avec l'accroissement des charges. Autrement dit, le coefficient m n'est pas constant.

Le rapport K du coefficient d'élasticité du fer et du béton n'est pas non plus constant.

$$K = \frac{E}{E'}$$

Or, comme E coefficient d'élasticité du fer est constant, c'est le coefficient E' du béton qui est variable. L'équation (40) montre d'ailleurs que K est une fonction du coefficient m et varie dans le même sens que ce dernier. Il en résulte que E' varie en sens inverse de m ou encore qu'il décroît avec les charges sans que la loi de décroissance soit connue.

Le coefficient d'élasticité E du fer n'est constant que quand les efforts par millimètre carré ne dépassent pas 15 *kg*, au delà il varie et décroît rapidement.

Le coefficient E' ne paraît pas présenter de période pendant laquelle il est constant et il semble décroître d'une façon continue.

Les expériences faites sur le fer, matière à peu près homogène, ont permis de trouver la loi de variation du coefficient E. Cependant cette loi n'a rien d'absolu.

Le béton est un composé de sable et de ciment. La fabrication du ciment paraît aujourd'hui très perfectionnée, et semble réunir toutes les conditions pour réaliser l'homogénéité du produit. Mais cependant il suffit d'ouvrir un registre d'essais pour constater de suite que la matière obtenue donne des résultats si variables que l'on est conduit à penser que la perfection n'est pas atteinte.

Le sable est un produit de composition variable d'une carrière à l'autre, et, dans un même tas, d'un point à l'autre.

Le béton qui résulte du mélange de ces deux matières ne peut donc à son tour offrir les caractères d'un corps homogène.

En admettant même la perfection atteinte pour la fabrication du ciment et la pureté du sable, les procédés employés pour le mélange ne peuvent, malgré tous les soins apportés, donner une substance homogène en tous ses points.

Enfin l'emploi du béton frais, qui se fait par couches successives, donne lieu à des plans de clivage et de rupture qu'il est difficile d'éviter, sans compter les vides plus ou moins grands qui restent à l'intérieur.

Deux blocs de béton constitués dans des conditions apparentes identiques présenteront donc en général des différences intimes relativement importantes, que révèlent les expériences.

Tant que la fabrication du ciment ne sera pas parfaite, que l'on ne pourra pas compter sur l'homogénéité du sable et que la façon et l'emploi du béton n'auront pas été perfectionnés, il convient de rester dans une sage réserve à l'égard du coefficient m. C'est pourquoi nous pensons qu'en l'état actuel des choses, il ne faut pas chercher sa valeur en faisant la moyenne des coefficients obtenus au cours des essais, mais de le prendre au moins égal au maximum constaté ou mieux supérieur à ce maximum.

Et puis le coefficient m est encore variable avec d'autres éléments tels que le dosage du béton, etc.

De nouvelles expériences s'imposent donc, mais en attendant en prenant $m = 0{,}80$, ainsi que nous l'avons expliqué ci-dessus, on reste dans les limites d'une sécurité convenable.

Formules corrigées. — Les faits que nous avons exposés dans ce chapitre nous conduisent à faire une modification aux formules données dans le tableau final du chapitre précédent.

Peut-être serons-nous amenés à en proposer d'autres si de nouvelles expériences y obligent. Le coefficient m si peu connu varie avec tant d'éléments qu'il sera peut-être difficile de le fixer définitivement. Il présente quelque analogie avec

POUTRES reposant sur deux appuis de niveau dans les hypothèses ci-dessous.	ARMATURES POUR RÉSISTER AU MOMENT FLÉCHISSANT		BARRES DE RÉSISTANCE A L'EFFORT TRANCHANT			OBSERVATIONS
	Section d'une armature.	Nature.	Section.	Longueur.	Position.	
Chargées de poids quelconques, encastrées ou non.	(1) $S = \frac{M}{Rh}$ (24)	(2) Fer ou acier	(3) $S' = \frac{2A}{R}$ (24 *bis*)	A calculer dans chaque cas.	A rechercher dans chaque cas.	(1) M est le maximum du moment fléchissant. (2) R est pris égal à 9×10^6 aussi bien pour le fer que pour l'acier.
Chargées uniformément et encastrées de telle sorte que $\alpha \leq 24$ . . .	$S = \frac{pl^2}{108 \times 10^6 \times h}$ (25 *bis*)	Fer ou acier	$S' = \frac{pl}{9 \times 10^6}$ (26 *bis*)	h	A partir de chaque appui.	(3) A est le maximum de l'effort tranchant.
Chargées uniformément et simplement posées ou encastrées incomplètement de telle sorte que $\alpha > 24$ . .	$S = \frac{pl^2}{72 \times 10^6 \times h}$ (27 *bis*)	Fer ou acier	$S' = \frac{ph}{9 \times 10^6}$ (26 *bis*)	$4\ h$	(4) Milieu de la portée.	(4) Ces barres peuvent être supprimées sans inconvénient.

celui qui entre dans les formules du débit des déversoirs et qui varie avec les dispositions des ouvrages.

En attendant de nouveaux faits, voir à la page précédente le nouveau tableau que nous proposons pour l'application des formules, aux lieu et place du tableau analogue du chapitre III.

Le calcul de α se fait comme il a été indiqué au chapitre précédent.

Adopter les formules de l'encastrement complet représenté par $\alpha = 12$ pour toutes les valeurs de α comprises entre 12 et 24, c'est augmenter la sécurité.

Adopter les formules des poutres simplement posées pour les valeurs de α supérieures à 24, c'est également augmenter la sécurité.

CHAPITRE V

CALCULS EFFECTIFS ET DÉTAILS PRATIQUES

§ A. — *Règles générales.*

Préliminaires. — La section des barres, quelle que soit leur nature, est donnée pour des poids uniformément répartis par l'équation générale.

$$S = \frac{pl^2}{B \times h}$$

dans laquelle B a pour valeur 108×10^6 ou 72×10^6 suivant que la poutre est encastrée ou non.

Ces barres de résistance au moment fléchissant constituen à elles seules la presque totalité du poids du métal puisque les barres de résistance à l'effort tranchant ont une longueur au plus égale à h (dont la plus grande valeur est $\frac{1}{12}\,l$) et une section maxima qui ne dépasse pas la moitié de celles des armatures. On en conclut que le poids des barres de résistance à l'effort tranchant ne peut dépasser $\frac{1}{24}$ soit 4 p. 100 du poids des armatures. Nous négligerons ces barres dans la recherche des règles générales.

D'autre part, nous poserons :

$$h = 20\,r$$

et

$$S = \frac{N}{2}\,\pi r^2$$

N étant le nombre total des barres des armatures (comme au chapitre Ier) ;

r étant le rayon des barres.

La formule précédente, dans laquelle on remplace h et S par leurs valeurs ci-dessus, devient

$$\frac{N}{2}.\pi.r^2 = \frac{pl^2}{B.20.r}$$

d'où

$$r^3 = \frac{2pl^2}{B.20.\pi.N}$$

et

$$r = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{10.\pi.B}}\right)^2 \times \frac{p^{\frac{1}{3}} l^{\frac{2}{3}}}{N^{\frac{1}{3}}}$$

Le poids par mètre courant F des armatures ressort ainsi à

$$F = N\pi r^2 \times 8\,000\ kg$$

ou à

$$F = N.\pi \left(\sqrt[3]{\frac{1}{10.\pi.B}}\right)^2 \times \frac{p^{\frac{2}{3}} l^{\frac{4}{3}}}{N^{\frac{2}{3}}} \times 8\,000$$

ou à

$$F = C\, N^{\frac{1}{3}}.p^{\frac{2}{3}} l^{\frac{4}{3}} \qquad (43)$$

en posant $C = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{10.\pi.B}}\right)^2 \times 8\,000.$

Telle est la formule qui donne le poids par mètre courant du métal des armatures d'une poutre en ciment armé quand $h = 20\ r$, ce qui est le cas général.

La discussion de cette formule donne lieu aux règles suivantes.

Première règle. — *Le nombre des barres des armatures doit être le plus petit possible.*

La formule (43) indique que le poids par mètre courant des armatures d'une poutre en ciment armé est, toutes choses égales d'ailleurs, c'est-à-dire pour une même portée et pour un même poids uniformément réparti, proportionnel à $N^{\frac{1}{3}}$ ou à $\sqrt[3]{N}$.

Si

$N = 2.\ldots\ldots$	$\sqrt[3]{N} = 1{,}26$	$N = 6.\ldots$	$\sqrt[3]{N} = 1{,}82$
$N = 4.\ldots\ldots$	$\sqrt[3]{N} = 1{,}59$	$N = 8.\ldots\ldots$	$\sqrt[3]{N} = 2{,}00$

$N = 10.\ldots\ldots\ \sqrt[3]{N} = 2{,}15$ etc.

Si l'on représente par 1 le poids du fer correspondant à 2 barres, le poids du fer pour 4, 6, 8, 10 barres sera représenté par 1,26 — 1,44 — 1,59 — 1,70.

Donc, au point de vue de la dépense de métal, il est indispensable de réduire le nombre des barres dans les limites possibles.

Si, de plus, l'on considère que le massif de béton croît presque proportionnellement au nombre de barres, la conclusion précédente s'impose encore avec plus de force.

2e Règle. — *La poutre en ciment armé est d'autant plus économique que les poids supportés sont plus considérables.*

La formule (43) indique que le poids par mètre courant du métal est proportionnel à $p^{\frac{2}{3}}$ ou à $\sqrt[3]{p^2}$.

Si l'on envisage les diverses valeurs de p, on a

$p =$ 250 *kg* . .	$\sqrt[3]{p^2} =$ 40	$p =$ 1 500	$\sqrt[3]{p^2} =$ 131
$p =$ 500. . . .	= 63	= 1 750	= 145
= 750 . . .	= 83	= 2 000	= 159
= 1 000 . . .	= 100	= 3 000	= 208
= 1 250 . . .	= 116	= 4 000	= 252

Ce tableau montre que, si l'on représente par 1 le poids de fer relatif à $p = 250\ k$, quand p est multiplié par 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 — 12 — 16, le poids du métal n'est multiplié que par

1,6 — 2,1 — 2,5 — 2,9 — 3,3 — 3,6 — 4 — 5,2 — 6,3

Donc au point de vue de la dépense de métal, celle-ci ne croît pas à beaucoup près aussi vite que les poids supportés par la construction.

En outre, comme le nombre des barres ne change pas, le prisme de béton conserve une largeur à peu près constante.

Sa hauteur croît à peu près comme h ou $20\,r$, c'est-à-dire proportionnellement à $p^{\frac{1}{3}}$ ou $\sqrt[3]{p}$.

Son volume est donc aussi proportionnel à $\sqrt[3]{p}$.

$p = 250$. . . .	$\sqrt[3]{p} = 6{,}3$	$p = 2\,000$. . . .	$\sqrt[3]{p} = 12{,}3$
$p = 500$. . . .	$= 7{,}9$	$p = 3\,000$. . . .	$= 14{,}4$
$p = 1\,000$. . . .	$= 10$	$p = 4\,000$. . . .	$= 15{,}9$

Lorsque p croît et se multiplie par

2 4 8 12 16

le volume du béton s'est multiplié par

1,25 1,60 2 2,3 2,4

Il résulte de ce qui précède que pour une même portée et pour un même nombre de barres le prix de la poutre par mètre courant a une variation beaucoup moins rapide que l'accroissement des charges, ce qui démontre notre proposition.

3e Règle. — *La poutre en ciment armé est d'autant moins économique que la portée est plus grande.*

La formule (43) montre que le poids du métal par mètre courant est proportionnel à $l^{\frac{4}{3}}$ ou $\sqrt[3]{l^4}$.

Si l'on envisage les diverses valeurs de l, on a

$l = 2m$	$\sqrt[3]{l^4} = 2{,}52$	$l = 10$	$\sqrt{l^4} = 21{,}6$
$= 4$.	$= 6{,}35$	$= 12$	$= 27{,}5$
$= 6$.	$= 10{,}9$	$= 15$	$= 37$
$= 8$.	$= 16$		

Tandis que la portée est multipliée par

2 3 4 5 6 7,5

le poids du métal par mètre courant l'est par

2,5 4,4 6,4 8,6 11 14,8

la croissance du poids est donc bien plus rapide que la croissance de la portée. Ceci justifie l'emploi de supports.

Il est clair, en effet, qu'une poutre de 12 *m* de portée qui exige un poids de fer représenté par 27,5 par mètre courant, n'exigera plus que 10,9 si on la supporte au milieu de façon à n'avoir plus qu'une portée de 6 *m* et 6,35 si on la supporte en deux points distants de 4 *m*.

Le béton diminue aussi dans de grandes proportions quand on emploie des supports.

Conséquences. — La formule (43) que nous avons établie précédemment pour en déduire les trois règles ci-dessus ne sera pas employée dans les calculs pratiques que nous allons faire parce qu'elle est trop compliquée.

Elle nous a enseigné trois grandes idées :

1° Qu'il faut employer le moins de barres possible;

2° Qu'il n'y a pas à hésiter sur l'emploi des poutres en béton de ciment armé quand il s'agit de lourdes charges, mais que cet emploi est moins favorable pour les charges légères.

3° Que l'emploi de supports doit être examiné quand il s'agit de grandes portées.

Le terrain est donc bien déblayé pour aborder les calculs des poutres.

§ B. — *Calcul d'un plancher entre deux murs distants de* 5 *m*.

Hypothèses. — Dans le calcul qui va suivre, ainsi que dans tous ceux de ce chapitre, nous ferons les hypothèses suivantes :

1° Les poutres sont uniformément chargées.

2° La surcharge est uniformément répartie à raison de 500 *kg* par mètre carré de plancher.

3° Le diamètre des fers sera voisin ou égal à $\frac{1}{10} h$;

4° Le hourdis aura 0,08 *m* d'épaisseur en général.

5° Les poutrelles seront distantes de 1 *m* d'axe en axe.

6° La densité du béton de ciment sera prise égale à 2 200 *kg* par mètre cube.

7° Les formules employées seront celles du tableau final du chapitre IV.

Nous ferons remarquer que la formule (43) permet de calculer sans tâtonnements le diamètre des barres.

Pour une portée de 5 *m* entre murs, nous admettrons que

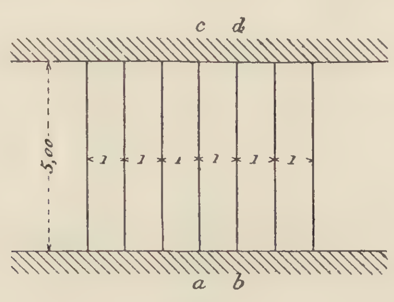


Fig. 24.

les éléments du plancher sont le hourdis et les poutrelles et que celles-ci pénètrent de 0,40 *m* dans les murs à chaque extrémité (fig. 24).

Calcul du hourdis. — Le hourdis qui recouvre le rectangle *abcd* compris entre deux poutrelles sera considéré comme

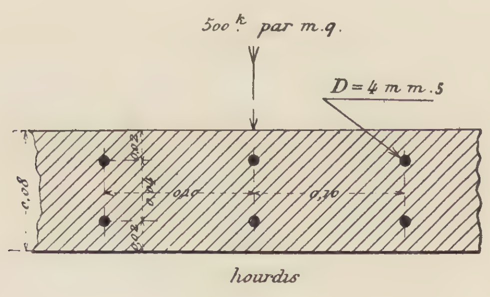


Fig. 24 *bis*.

une poutre à deux armatures symétriques ayant une portée de 1 *m* et une largeur de 5 *m*. Les deux armatures seront

distantes de 0,044 *m* d'axe en axe et les fils de chaque armature espacés de 0,10 *m* d'axe en axe (fig. 24 *bis*).

Nous avons expliqué que cette poutre qui constitue le hourdis peut être considérée comme encastrée.

Cette poutre supporte les poids suivants :

Poids propre du hourdis 5 $m \times 1\ m \times 0{,}08\ m \times 2\,200\ kg$ =	880 *kg*
Surcharge 5 $m^2 \times 500\ kg$ . . . . =	2 500 »
pl. . . . . =	3 380 *kg*

Comme $l = 1\ m$, $h = 0{,}04$, la formule (25 *bis*) donne pour la section totale des 50 fers de chaque armature :

$$S = \frac{3\,380 \times 1}{108 \times 10^6 \times 0{,}04} = 780\ mm^2$$

Chaque fil aura ainsi une section de 15,6 mm^2, un diamètre de 4,5 *mm* et un poids de 0,127 *kg* par mètre courant.

Le diamètre des fils est bien égal au $\frac{1}{10}$ de h.

Les barres de résistance à l'effort tranchant qui devraient avoir 0,04 *m* de saillie à partir du point d'encastrement (axe des poutrelles) seront négligées parce que l'extrémité de cette saillie ne déborde pas la demi-largeur des poutrelles.

Calcul des poutrelles. — Chaque poutrelle supporte sur sa longueur les poids suivants :

Du chef du hourdis	3 380 *kg*
Son poids propre $0{,}27 \times 0{,}09 \times 5 \times 2\,200$ . .	267 »
pl	3 647 *kg*

Prenons $h = 0{,}27\ m$. Comme $l = 5\ m$, la formule (25 *bis*) donne pour la section d'une armature.

$$S = \frac{3\,647 \times 5}{108 \times 10^6 \times 0{,}27} = 625\ mm^2$$

Un fer rond de 0,028 *m* de diamètre, pesant 5 *kg* par mètre

courant suffit à constituer cette section. Il est convenable car $\frac{2r}{h} = \frac{1}{10}$ (fig. 25).

Le prisme de béton aura 0,09 *m* de largeur et fera saillie de 0,27 *m* sous le hourdis.

Ici se pose la recherche de l'indice d'encastrement et de la largeur du patin d'appui.

Tout d'abord, il faut calculer P. Nous nous placerons dans un cas défavorable à l'encastrement, celui d'un plancher sous comble où P n'est formé que du poids de la toiture et du

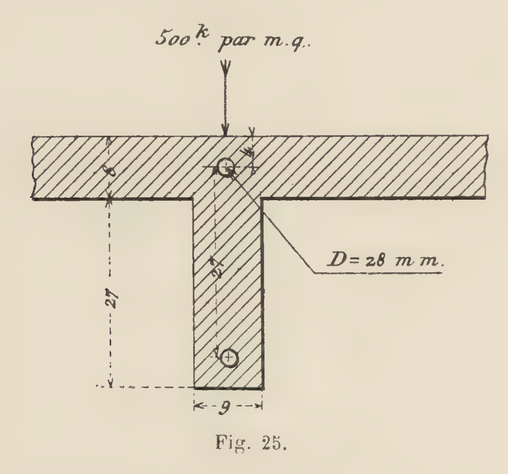


Fig. 25.

poids du mur situé entre le dernier plancher et le toit. C'est le cas que nous supposerons dans toute la suite des calculs. Ce poids P, qui correspond à une tranche de la moitié de la construction ayant 1 *m* de largeur (espacement des poutrelles), a pour valeur :

1° La toiture à raison de 200 *kg* par m^2 $2{,}5\ m^2 \times 200$	500 *kg*
2° Le mur supposé de 4 *m* de hauteur et 0,50 *m* d'épaisseur $4 \times 0{,}50 \times 1 \times 2000$	4 000
P =	4 500 *kg*

L'application des formules (35) et (36), en supposant que

les poutres pénètrent de 0,40 m dans chaque mur ($2\ b = 0,40$), donne

$$c = 0,13 \qquad c_1 = 0,20$$

comme $c < c_1$, on en déduit $\alpha = 24$

Les armatures seront donc en fer ; on constituera un patin

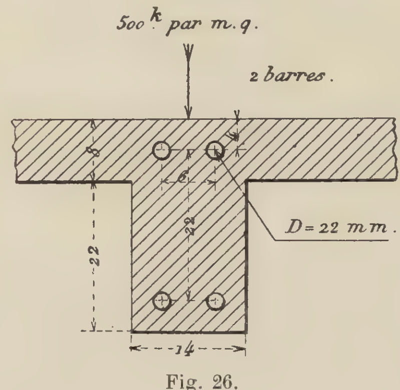


Fig. 26.

de 0,13 m de largeur dans chaque mur à l'aide de deux fers de même diamètre que celui des armatures ; enfin on placera

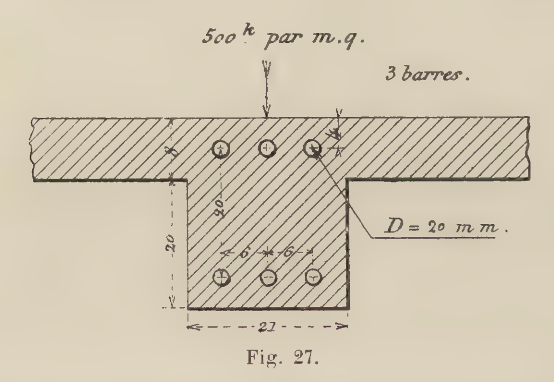


Fig. 27.

des barres de résistance à l'effort tranchant dont chacune aura 0,50 m de longueur et débordera le mur de 0,27 m.

La formule (26 *bis*) donne la section de ces barres

$$S' = \frac{3\,647}{9 \times 10^6} = 405\ mm^2$$

Il suffira d'un seul fer rond de 0,022 *m* de diamètre pesant 3,2 *kg* par mètre linéaire.

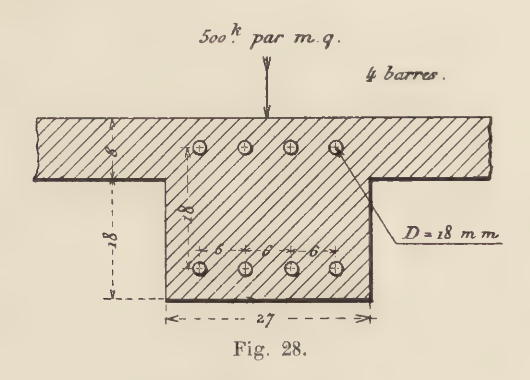


Fig. 28.

Métré d'une travée.

Béton :	hourdis, 5 *m* × 1 *m* × 0,08	=	0,400 m^3
	poutrelles, 5 *m* × 0,27 × 0,09	=	0,122 »
			0,522 m^3
Fers :	hourdis, 2 × 50 × 1 × 0,127 *kg*	=	12 *kg*
	poutrelles, armatures et patins, 2 × (5,80 + 0,26) × 5 *kg*. .	=	60 »
	barres supplémentaires, 2 × 0,50 × 3,2 *kg*	=	3 »
			75 *kg*

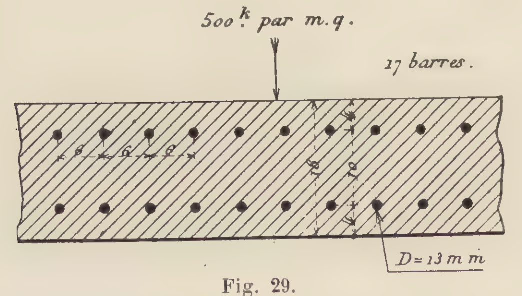


Fig. 29.

Par mètre carré de surface couverte, il faudra donc employer :

Béton, 0,103 m^3 à 70 *fr*	=	7,21 *fr*
Fers, 15 *kg* à 0,35 *fr* . .	=	5,25 »
Prix du mètre carré. . .		12,46 *fr*

Les prix de 70 *fr* par mètre cube de béton mis en place, y compris les échafaudages, coffrages, etc., et de 0,35 *fr* par kilogramme de fer, ne sont que conventionnels. Ils serviront à établir ultérieurement une comparaison entre les dépenses des divers planchers.

Remarque I. — Si l'on avait employé pour constituer les poutrelles 2, 3, ..., 17 barres par armature (fig. 26, 27, 28

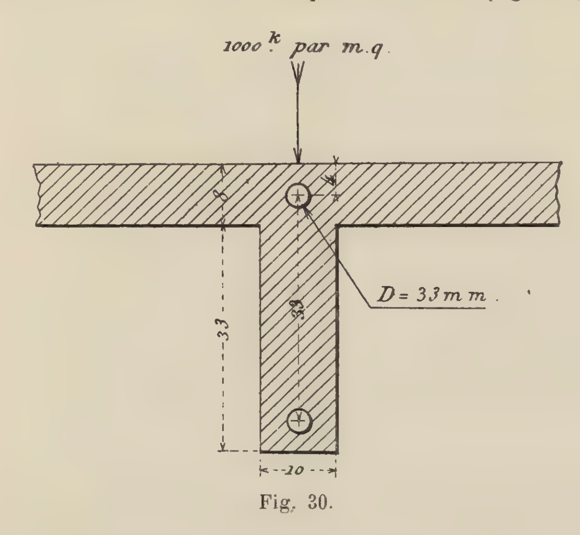


Fig. 30.

et 29), le hourdis restant à peu près constant, on aurait obtenu les résultats suivants avec la surcharge de 500 *kg*.

NOMBRE des barres par armature.	PAR MÈTRE CARRÉ DE PLANCHER					PRIX par mètre carré de plancher et par tonne de surcharge.
	Poids du fer.	Volume du béton.	PRIX			
			du fer.	du béton.	total.	
	kg.	m^3	*fr.*	*fr.*	*fr.*	*fr.*
1	15	0,103	5,25	7,20	12,45	24,90
2	18	0,108	6,30	7,56	13,86	27,72
3	21	0,116	7,35	8,12	15,47	31,94
4	23	0,123	8,05	8,61	16,66	33,32
»	»	»	»	»	»	»
17	40	0,180	14	12,60	26,60	53,20

Le tableau précédent confirme la première règle du paragraphe A, savoir que l'accroissement du nombre des barres augmente la dépense des planchers en ciment armé. Comme il s'agit en fait ici d'un même service rendu : même portée,

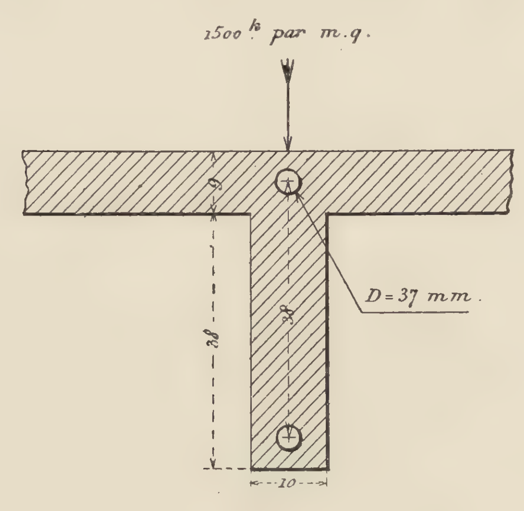


Fig. 31.

même surcharge, la multiplication des barres à l'excès finit par doubler le prix de revient.

Remarque II. — Si l'on avait fait varier la surcharge, 250, 500, 1 000, 1 500 *kg* tout en n'employant qu'une seule barre par armature, on aurait obtenu les résultats indiqués par les profils (fig. 30, 31 et 32), et le tableau suivant :

SURCHARGE par mètre carré.	PAR MÈTRE CARRÉ DE PLANCHER					PRIX par mètre carré de plancher et par tonne de surcharge.
	Poids du fer.	Volume du béton.	Prix du fer.	Prix du béton.	Prix total.	
kg.	*kg.*	m^3	*fr.*	*fr.*	*fr.*	*fr.*
250	11	0,100	3,85	7,00	10,85	43,40
500	15	0,103	5,25	7,20	12,45	24,90
1 000	23	0,113	7,05	7,90	14,95	14,95
1 500	30	0,124	10,50	7,98	18,48	12,32

L'examen de ce tableau vient à l'appui de la deuxième règle du paragraphe A.

On voit, en effet, de la façon la plus évidente que quand la surcharge croît de 1 à 6 :

1° Le poids du fer triple à peine ;

2° Le volume du béton n'augmente que de 25 p. 100 ;

3° Le prix par mètre carré de plancher n'augmente que de 70 p. 100;

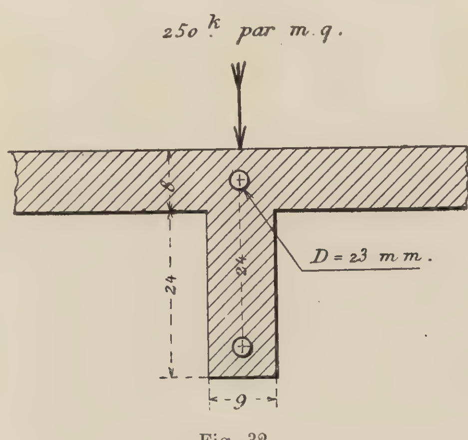


Fig. 32.

4° La valeur de l'ouvrage rapportée au mètre carré et à la tonne de surcharge (vraie mesure de l'utilisation des matériaux) décroît de 3,5 à 1.

Les planchers en ciment armé conviennent admirablement pour les grandes surcharges.

§ C — *Calcul d'un plancher entre deux murs distants de 10 m.*

Nous considérerons ici les trois combinaisons suivantes :

Emploi de poutrelles et hourdis ;

Emploi de poutres, poutrelles et hourdis ;

Emploi de poutres, poutrelles, hourdis et supports.

a). *Emploi de poutrelles et hourdis.* — Les poutrelles iront

d'un mur à l'autre, seront distantes de 1 *m* d'axe en axe et pénétreront de 0,60 *m* dans les murs ($2\,b = 0{,}60\ m$) (fig. 33).

Calcul du hourdis. — Il est le même que celui du paragraphe B;

Calcul des poutrelles. — Chaque poutrelle supporte sur sa longueur les poids suivants uniformément répartis :

Du chef du hourdis, 3 380 *kg* × 2. .	6 760 *kg*
Son poids, 0,12 × 0,52 × 10 × 2 200 *kg*	1 370 »
pl =	8 130 *kg*

Recherchons l'indice d'encastrement et la longueur de patin d'appui.

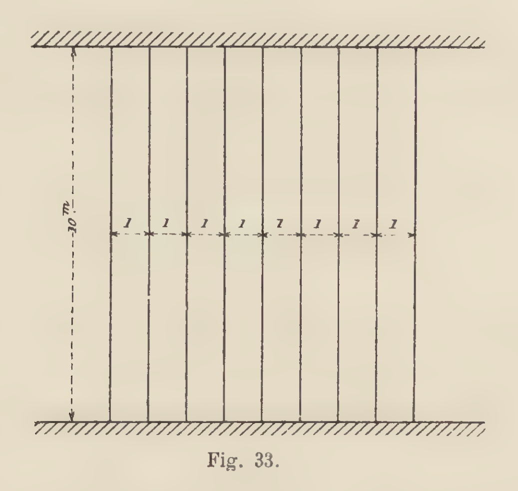


Fig. 33.

Comme au paragraphe B, nous poserons pour P le poids suivant :

Toiture 5 m^2 × 200 *kg*	1 000 *kg*
Mur, comme ci-dessus	4 000 »
	P = 5 000 *kg*

L'application des formules (35) et (36) donnera :

$$c = 0{,}24 \qquad c_1 = 0{,}16$$

comme $c > c_1$, α se calculera par la formule (34) et l'on obtient

$$\alpha = 39$$

Les armatures seront en fer. Le patin sera constitué par deux fers de même diamètre que les armatures et aura 0,16 *m* de longueur. Les barres de résistance à l'effort tranchant seront supprimées.

Prenons $h = 0,52\ m$. Comme $l = 10\ m$, la formule (27 *bis*) donne pour la section d'une armature :

$$S = \frac{8\,130 \times 10}{72 \times 10^6 \times 0,52} = 2\,171\ mm^2$$

Un fer rond de 52 *mm* de diamètre pesant 17 *k* par mètre

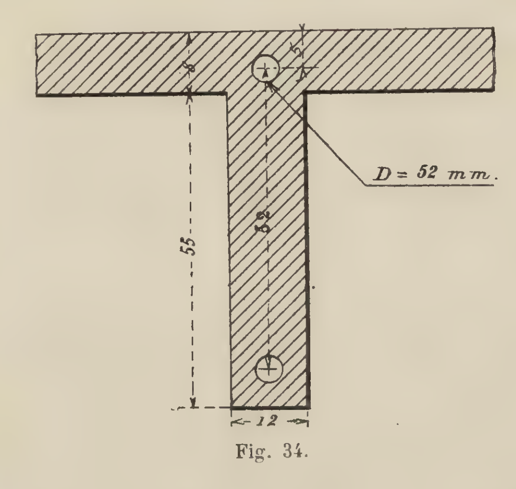


Fig. 34.

linéaire suffit à constituer cette section. Il est convenable car $\frac{2r}{h} = \frac{1}{10}$ (fig. 34).

Le prisme de béton aura 0,12 *m* de largeur et fera saillie de 0,55 *m* sous le hourdis.

Remarque. — Si l'on avait affaire à un plancher pour lequel $P = 10\,000\ kg$, on aurait trouvé $c = 0,23$, $c_1 = 29$, $\alpha = 24$ armatures en fer, patins de 0,23 *m* de largeur, barres de résistance à l'effort tranchant.

Métré d'une travée.

Béton hourdis 10 $m \times 1$ $m \times 0{,}08$.	0,800 m^3	1,424 m^3
— poutrelles 10 $m \times 0{,}12 \times 0{,}52$	0,624	
Fers hourdis	12 *kg*	403 *kg.*
Poutrelles, armatures et patins 2 (11,20 + 0,32) × 17 *kg*.	391 *kg*	

Par mètre carré de surface couverte il faudra donc employer :

Béton, 0,142 m^3 à 70 *fr* =	9,94 *fr*
Fer, 40 *kg* à 0,35 *fr* =	14,00 »
Prix du mètre carré	23,94 *fr*

b). *Emploi de poutres, poutrelles et hourdis.* — Les poutres iront d'un mur à l'autre et seront distantes de 5 *m* d'axe en

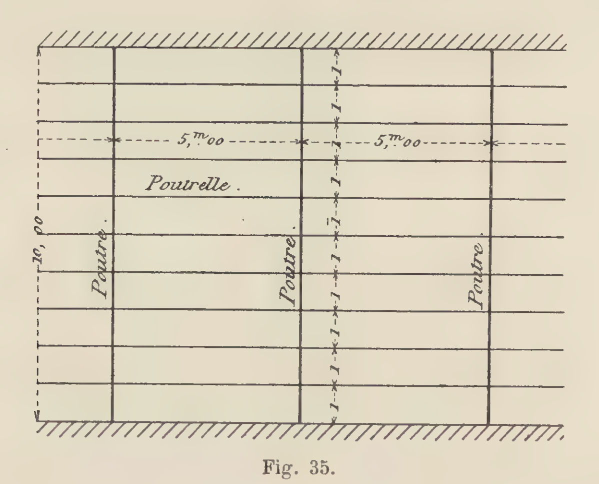


Fig. 35.

axe. Les poutrelles seront dirigées dans le sens perpendiculaire et seront distantes de 1 *m* d'axe en axe. Le hourdis, enfin, aura ses armatures dirigées dans le même sens que les armatures des poutres (fig. 35).

Calcul du hourdis. — Il est le même que celui du paragraphe B.

Calcul des poutrelles. — Les armatures et la section du béton seront les mêmes que celles du paragraphe B. Les barres supplémentaires de résistance à l'effort tranchant de 0,25 *m* de longueur de débordement sur le point d'encastrement recevront une longueur totale de 0,50 *m*. L'encastrement est complet. La poutrelle porte sur la poutre suivant une surface de $0{,}21 \times 0{,}09 = 189\ cm^2$ qui reçoit la pression de $pl = 3\,647\ kg$, de sorte que la pression par cm^2 ne dépasse pas 19 *k*.

Calcul des poutres. — Chaque poutre reçoit sur toute sa longueur les poids suivants que nous considérerons comme uniformément répartis.

Du chef des poutrelles et des hourdis, $3\,647\ kg \times 10$	36 470 *kg*
Le poids propre, $0{,}24 \times 0{,}70 \times 10\ m \times 2\,200$ . . .	3 696 »
$pl =$	40 166 *kg*

Recherchons l'indice d'encastrement et la longueur du patin d'appui.

P est cinq fois plus grand que dans le cas précédent (paragraphe C, *a*).

$$P = 25\,000\ kg.$$

L'application des formules (35) et (36), en supposant que les poutres pénètrent de 0,60 *m* dans chaque mur ($2\,b = 0{,}60\,m$), donne

$$c = 1{,}25 \qquad c_1 = 0{,}80$$

Comme $c > c_1$, α se calculera par la formule (34) et l'on obtient :

$$\alpha = 40$$

Les armatures seront en fer. Le patin sera constitué par deux fers de même diamètre que les armatures et aura 1,25 *m* de longueur. Les barres de résistance à l'effort tranchant seront supprimées.

Il n'est plus guère possible de n'employer qu'un seul fer par armature parce que : 1° la poutre aurait une trop grande

hauteur eu égard à sa longueur; 2° le diamètre des fers dépasserait la limite commerciale. Chaque armature aura deux fers.

Prenons $h = 0{,}70\,m$. Comme $l = 10\ m$, la formule 27 *bis* donne

$$S = \frac{40\,160 \times 10}{72 \times 10^6 \times 0{,}70} = 7\,930\ mm^2$$

Chaque barre aura 3 965 mm^2 de section, 0,071 m de

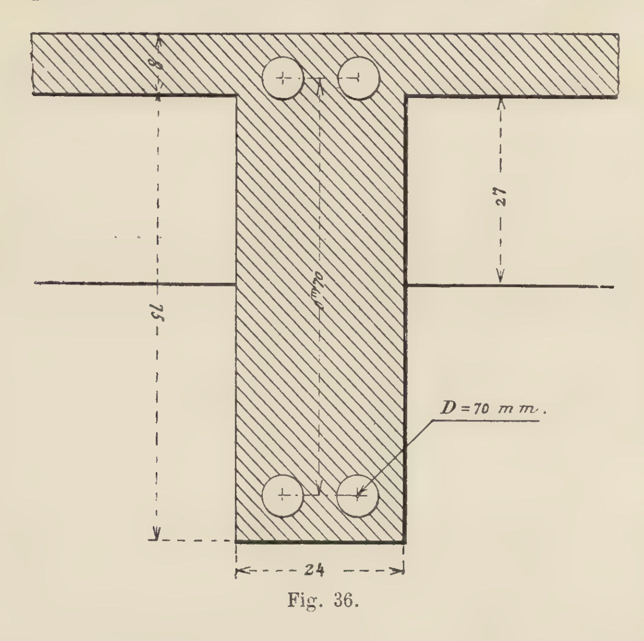


Fig. 36.

diamètre et pèsera 31 kg par mètre courant. Le rapport $\frac{2r}{h} = \frac{1}{10}$ (fig. 36).

Le prisme de béton aura 0,24 m de largeur et une saillie de 0,75 m sous le hourdis.

Métré d'une travée.

Béton :	hourdis, 50 $m^2 \times 0{,}08$.	4,000 m^3
	poutrelles, $9 \times 4{,}79 \times 0{,}27 \times 0{,}09$.	1,050 »
	poutres $10 \times 0{,}75 \times 0{,}24$.	1,800 »
		6,850 m^3

Fers : hourdis, $2 \times 5\ m \times 100 \times 0{,}127\ kg$ = 127 *kg*
poutrelles, $2 \times 5\ m \times 5\ kg \times 9$ = 450 »
barres supplémentaires, $0{,}5 \times 3{,}2 \times 9$ = 14 »

591 *kg*

Poutres armatures et patins $4 \times (10 + 1{,}20 + 1{,}28) \times 31\ kg$ = ... 1 550 *kg*

2 141 *kg*

Par mètre carré de surface couverte, il faudra donc employer :

Béton : 0,137 à 70 *fr*.	9,59 *fr*
Fers : 1,470 à 0,35 *fr*.	14,70 »
Prix du mètre carré . .	24,29 *fr*

Remarque.—Les deux solutions étudiées sont équivalentes au point de vue de la dépense. La seconde a un côté faible, c'est qu'elle exige une hauteur de 0,83 *m* pour loger le plancher, tandis que la première n'exige que 0,63 *m*. Cette infériorité est souvent de nature à la faire repousser.

c). *Cas précédent avec un support au milieu de la poutre.* — Nous supposons que la poutre précédente est supportée en son milieu par un pilier sur lequel elle est encastrée et qu'elle continue à être encastrée à ses extrémités. Il est facile de se rendre compte que tout se passe comme si elle était coupée sur le support et comme si elle y était encastrée.

La formule (25 *bis*) continue donc à être applicable pour chacun des tronçons de 5 *m* de la poutre (fig. 37).

Calcul des tronçons de 5 m de la poutre. — Chaque tronçon reçoit sur toute sa longueur les poids suivants uniformément répartis :

Du chef des poutrelles et du hourdis, $3\,647 \times 5$	18 235 *kg*
Son poids propre, $0{,}19 \times 0{,}40 \times 5\ m \times 2\,200\ kg$.	760 »
$pl =$	18 995 *kg*

Le prisme de béton aura 0,19 *m* de largeur et un relief de 0,35 *m* sous le hourdis.

Recherchons l'indice d'encastrement et la largeur du patin d'appui dans le mur.

$$P = 25\,000\ kg$$

L'application des formules (35) et (36), en supposant que les poutres pénètrent de 0,60 *m* dans chaque mur ($2b = 0{,}60$), donne

$$c = 0{,}31 \qquad c_1 = 0{,}73$$

Comme $c < c_1$, on déduit

$$\alpha = 24$$

Les armatures seront en fer. Les patins seront constitués

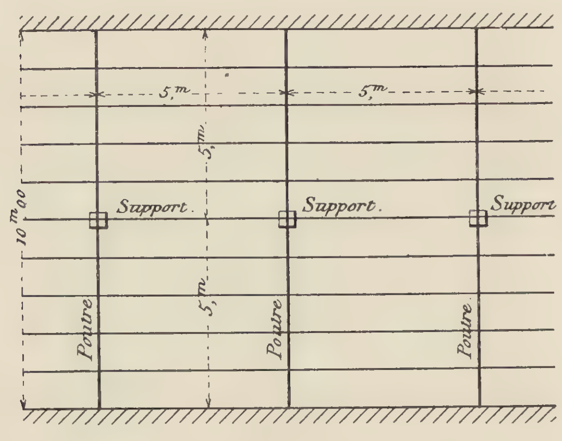


Fig. 37.

par deux barres de fer de même diamètre que les armatures et auront 0,73 *m* de longueur. Les barres de résistance à l'effort tranchant seront données par la formule (26 *bis*).

$$S = \frac{18\,290}{9 \times 10^6} = 2\,032\ mm^2$$

et pourront être constituées par deux fers ronds ayant chacun une section de 1 016 mm^2, un diamètre de 0,036 *m* et un poids de 8 *kg* par mètre linéaire. Ces barres auront 0,70 *m* de longueur dont 0,35 *m* de saillie sur le mur d'appui.

Prenons $h = 0,40\ m$, comme $l = 5\ m$, la formule (25 *bis*) donne

$$S = \frac{18\,995 \times 5}{108 \times 10^6 \times 0,40} = 2\,200\ mm^2$$

Si l'on emploie deux fers par armature, chacun d'eux aura

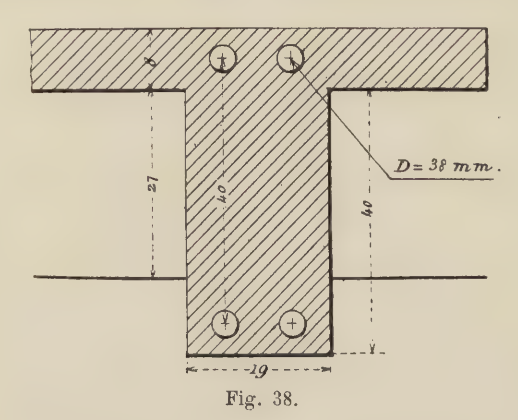


Fig. 38.

une section de 1100 mm^2, un diamètre de 0,038 m et un poids de 9 kg par mètre courant.

Le rapport $\frac{2r}{h} = \frac{1}{10}$ (fig. 38).

Calcul du support. — Il recevra une charge de 18 995 kg. La surface d'appui, en admettant 25 kg pour la résistance des

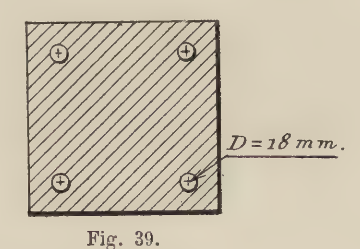


Fig. 39.

matériaux à la compression par cm^2, devra être de 732 cm^2, soit un rectangle de $0,19 \times 0,38$. Une corniche raccordera cette surface au support qui aura une section carrée de $0,25\ m \times 0,25\ m$ et sera muni de quatre fers de 0,018 m de

diamètre pesant 2 k par mètre, capables à eux seuls de recevoir la moitié de la charge (à raison d'un coefficient de travail de 9 kg par mm^2) (fig. 39).

Ce support, s'il est construit spécialement, aura 4 m en général de hauteur, plus ses fondations le cas échéant.

Métré d'une travée.

Béton : hourdis et poutrelles comme ci-dessus. .	5,050 m^3
poutres $10 \times 0,40 \times 0,19$	0,760 »
	5,810 m^3
Fers : hourdis et poutrelles comme ci-dessus. . .	591 kg
poutres, $4 \times (10 + 1,20 + 0,73) \times 9$ kg. ...	432 »
barres supplémentaires, $4 \times 0,7 \times 8$ kg . .	22 »
	1 045 kg

Par mètre carré de surface couverte, il faudra donc employer

Béton 0,116 à 70 fr.	8,12 fr
Fers 21 kg à 0,35 fr	7,35
Prix du mètre carré. .	15,47 fr

L'emploi d'un support diminue ainsi de 36 p. 100 le prix de la construction sans support. Ce qui démontre une fois de plus la troisième règle du paragraphe A. Il est vrai qu'il faut tenir compte de la dépense du support proprement dit, dépense fort variable et dont il est difficile de faire état ici. En élévation, il coûte de 7 à 7,50 fr par mètre de hauteur, soit 0,15 fr environ par mètre de hauteur et par mètre carré de plancher. Mais ce sont les fondations qui, le cas échéant, sont difficiles à apprécier en général et restent une question d'espèce.

§ **D.** — *Calcul d'un plancher entre deux murs distants de* 15 m.

a). *Emploi de poutres sans supports, poutrelles et hourdis.* — Les poutres iront d'un mur à l'autre et seront distantes de 5 m d'axe en axe (fig. 40).

Les poutrelles seront dirigées dans le sens perpendiculaire et distantes de 1 *m* d'axe en axe.

Le hourdis aura ses armatures dirigées dans le même sens que les armatures des poutres.

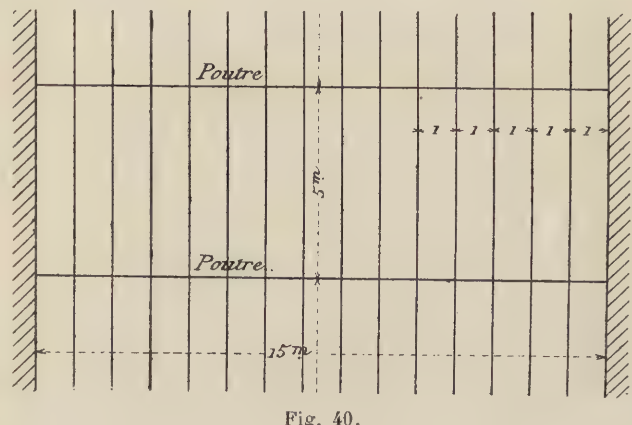


Fig. 40.

Calcul du hourdis et des poutrelles. — Il est clair que le hourdis et les poutrelles auront les mêmes dimensions qu'au paragraphe C — *b*.

Calcul des poutres sans support. — Chaque poutre reçoit sur toute sa longueur les poids suivants uniformément répartis :

Du chef des hourdis et des poutrelles $3\,647 \times 15 =$	54 705 *kg*
Le poids de la poutre $0{,}40 \times 0{,}90 \times 15 \times 2\,200 =$	11 800 »
Fers des armatures et autres, environ	3 060 »
	$pl = 69\,565$ *kg*

Recherchons l'indice d'encastrement et la largeur du patin d'appui.

$$P = 25\,000 \ kg$$

L'application des formules (35) et (36), en supposant que les poutres pénètrent de 0,60 dans chaque mur ($2b = 0{,}60$), donne :

$$c = 3{,}08 \qquad c_1 = 0{,}89$$

Comme $c > c_1$, α se calculera par la formule (34) et l'on obtient :

$$\alpha = 103$$

Les armatures seront en fer. Le patin sera constitué pour trois fers de même diamètre que les armatures et aura 0,89 *m* de longueur. Les barres de résistance à l'effort tranchant seront supprimées.

Avec des poids de cette importance, pour la stabilité de la construction, il paraît indispensable d'employer trois fers par armature. Nous prendrons $h = 0{,}90$. Comme $l = 15$ *m*, la formule (27 *bis*) donne :

$$S = \frac{69\,565 \times 15}{72 \times 10^6 \times 0{,}90} = 16\,100 \; mm^2$$

Chaque barre aura une section de 5 366 mm^2, un diamètre de 0,082 *m*, un poids par mètre courant de 42 *kg*. Le rapport $\frac{2r}{h} = \frac{1}{11}$ (fig. 41).

Le prisme du béton aura 0,40 *m* de largeur et une saillie de 0,94 *m* sous le hourdis.

Métré d'une travée.

Béton :	hourdis, 75 $m^2 \times 0{,}08$	6,000 m^3
	poutrelles, $14 \times 4{,}60 \times 0{,}27 \times 0{,}09$.	1,565 »
	poutres, $15 \times 0{,}94 \times 0{,}40$	5,640 »
		13,205 m^3
Fers :	hourdis, $2 \times 5\,m \times 150 \times 0{,}122\,kg$. . . . =	190 *kg*
	poutrelles, $2 \times 5 \times 5\,kg \times 14$ . . . . . . =	700 »
	barres supplémentaires $0{,}5 \times 3{,}2\,kg \times 14$. =	22 »
		912 *kg*
	Poutres, armatures et patins :	
	$6 \times (15 + 1{,}2 + 0{,}88) \times 42\,kg$ =	4 304 »
		5 216 *kg*

Par mètre carré de surface couverte, il faudra donc :

Béton, 0,176 $m^3 \times 70$ *fr*.	12,32 *fr*
Fers, $69 \times 0{,}35$ *fr*	24,15 »
Prix par mètre carré. . .	36,47 *fr*

b). *Cas précédent avec un support au milieu.* — Nous supposerons que la poutre précédente est soutenue en son milieu par un support et qu'elle continue à être encastrée aux extrémités. Comme il a été dit précédemment, il est facile de se rendre compte que dans ce cas tout se passe comme si la

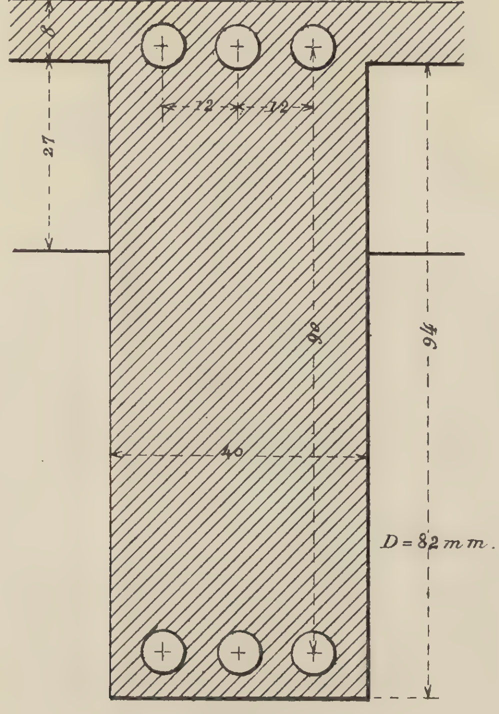


Fig. 41.

poutre était coupée sur le support et qu'elle y fût encastrée. La formule (25 *bis*) continue donc à être applicable pour chacun des tronçons de 7,50 *m* de longueur (fig. 42).

Calcul du tronçon de 7,50 *m.* — Chaque tronçon reçoit sur toute sa longueur les poids suivants uniformément répartis :

Du chef des hourdis et des poutrelles, 3 647 × 7,5 .	27 352 *kg*
Son poids propre, 0,20 × 0,50 × 7,5 × 2 200 . . .	1 650 »
Le poids des fers	928 »
pl =	29 930 *kg*

Recherchons l'indice d'encastrement et la largeur du patin d'appui.

$$P = 25\,000\ kg$$

L'application des formules (35) et (36), en supposant que les poutres pénètrent de 0,60 m dans les murs ($2\ b = 0{,}60$), donne :

$$c = 0{,}72 \qquad c_1 = 0{,}76$$

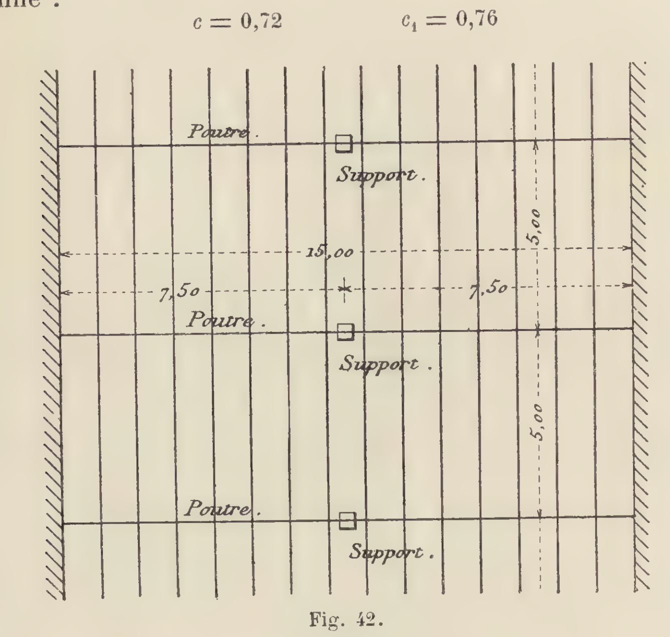


Fig. 42.

Comme $c < c_1$, on déduit :

$$\alpha = 24$$

Les armatures seront en fer. Les patins seront constitués par deux barres de fer de même diamètre que les armatures et auront 0,76 de longueur. Les barres de résistance à l'effort tranchant auront 0,90 m de longueur dont 0,45 m de saillie sur le mur d'appui. Des barres de même longueur seront placées sur le support.

Leur section sera donnée par la formule (26 *bis*).

$$S = \frac{29\,930}{9 \times 10^6} = 3\,325\ mm^2$$

Elles pourront être constituées par deux fers ronds ayant chacun une section de 1 662 mm^2, un diamètre de 0,046 m et un poids de 13 kg par mètre linéaire.

Prenons $h = 0{,}50$. Comme $l = 7{,}50\ m$, la formule (25 *bis*) donne :

$$S = \frac{29\,930 \times 7{,}5}{108 \times 10^6 \times 0{,}50} = 4\,157\ mm^2$$

Avec deux barres par armature, chaque barre aura une

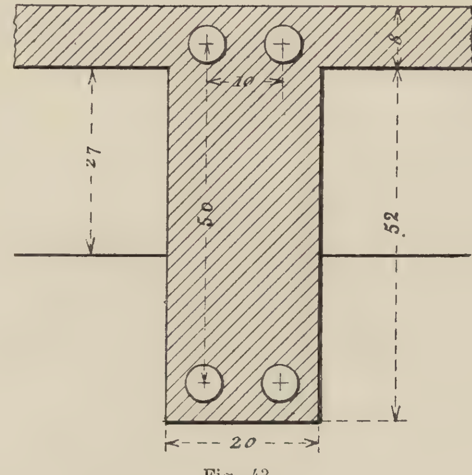


Fig. 43.

section de 2 078 mm^2, un diamètre de 0,051 m et un poids par mètre courant de 16 kg (fig. 43).

Le rapport $\frac{2r}{h} = \frac{1}{10}$. Le prisme du béton aura une largeur de 0,20 m et une saillie de 0,52 m sous le hourdis.

Calcul du support. — Il recevra une charge de 29 000 kg. La surface d'appui, en admettant 25 kg pour la résistance des matériaux à la compression par centimètre carré, devra être de 1 160 cm^2, soit un rectangle de 20×58. Une corniche armée de deux fers longitudinaux à sa partie supérieure raccordera cette surface au support qui aura une section carrée de 30×30 et sera muni de quatre fers ronds de 0,023 m de

diamètre, pesant 3,3 *kg* par mètre linéaire et capables à eux seuls de recevoir la moitié de la charge à raison de 9 *kg* par cm^2.

Ce support, s'il est construit spécialement, aura en général 4 *m* de hauteur, plus des fondations, le cas échéant.

Métré d'une travée.

Béton : hourdis et poutrelles comme ci-dessus.	7,565 m^3	
poutres, $15 \times 0,20 \times 0,50$.	1,500 »	
	9,065 m^3	
Fers : hourdis et poutrelles comme ci-dessus . .		905 *kg*
poutre, armature et patin		
$4 \times (15 + 1,20 + 0,76) \times 13,3$ . . . =		1 088 »
barres supplémentaires $6 \times 0,90 \times 13$ *kg* =		70 »
		2 063 *kg*

Par mètre carré de plancher, il faudra :

Béton, 0,121 à 70 *fr*	8,47 *fr*
Fers, 28 *kg* à 0,35 *fr*	9,80 »
Prix par mètre carré . .	18,27 *fr*

On pourrait faire ici les mêmes observations relatives : 1° à l'économie apportée par le support; 2° à l'impossibilité d'introduire la valeur des fondations de ce support.

Ce support coûte 0,15 *fr* par mètre de longueur et par mètre carré de plancher.

c) *Cas de deux supports espacés de 5 m.* — Il est clair que nous rentrons ici dans le cas du paragraphe C — *c*, sauf à ajouter la dépense d'un support en plus.

Prix du mètre carré de plancher, support non compris . 15,47 *fr*

soit les 42 p. 100 du prix sans support et les 84 p. 100 du prix avec un seul support.

§ E. — *Comparaison des prix.*

Nous résumons dans le tableau ci-après les prix de revient au mètre carré des divers cas étudiés, dans l'hypothèse

d'une surcharge de 500 *kg*. Les prix d'unité 70 *fr* par mètre carré de béton et 0,35 *fr* par kilogramme de fer ne sont pas des prix absolus, ils peuvent varier en plus ou en moins et, par suite, les chiffres de ce tableau ne servent qu'à une simple comparaison. Les prix des supports ne sont pas compris.

PORTÉES	SURCHARGE par mètre carré.	PRIX DE REVIENT DU MÈTRE CARRÉ DE PLANCHER		
		sans support.	avec 1 support.	avec 2 supports.
m.	*kg.*	*fr.*	*fr.*	*fr.*
5	500	12,45	»	»
10	500	24,29	15,47	»
15	500	36,47	18,27	15.47

On tire de ce tableau les quelques conclusions suivantes qui confirment les règles du paragraphe A :

1° Pour le plancher sans support, quand la portée passe du simple au triple, le prix du mètre carré augmente rapidement. Le prix du mètre carré, dans l'hypothèse d'une surcharge de 500 *kg* peut être représenté par la formule approximative :

$$2{,}50\ fr \times l$$

2° L'emploi de supports permet de rendre presque constant le prix du mètre carré. Cependant, à l'occasion de ces supports, nous ferons la remarque suivante. S'il fallait leur donner une grande longueur ou des fondations importantes, le bénéfice de leur emploi diminuerait sans cependant devenir nul.

3° Le bénéfice des supports est atténué par la gêne et l'encombrement du local sous plancher.

4° Ajoutons enfin que dans les prix ci-dessus n'entrent pas en ligne de compte les ligatures des armatures, ni les quelques petits travaux de parachèvement qui peuvent les accroître.

§ F. — *Détails pratiques.*

1° *Agencement des armatures entre elles.* — Reprenons le cas du paragraphe B, un seul fer par armature. Le hourdis à 0,08 *m* d'épaisseur, ses armatures sont des fils de 0,0044 *m* de diamètre distants verticalement de 0,04 *m* et horizontalement de 0,10 *m*. La poutrelle a 0,27 *m* de saillie, un fer de 0,028 *m* de diamètre par armature et la distance entre les deux armatures est de 0,27 *m* (fig. 44).

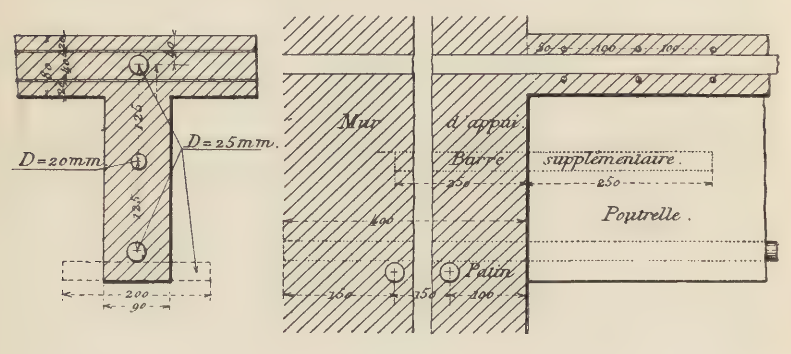


Fig. 44.

On disposera le fer de l'armature supérieure de façon qu'il passe entre et à mi-distance des fils du hourdis.

Les barres supplémentaires seront placées à mi-distance des armatures et dans le même plan vertical.

Quand les armatures ont plusieurs fers, la disposition est la même. Quand le diamètre des fers atteint l'écartement des fils, le fil supérieur reste fixe tandis que le fil inférieur s'infléchit sous la barre.

Examinons maintenant le cas où il existe une poutre, des poutrelles et un hourdis, par exemple, le cas du paragraphe C (*b*) (fig. 45).

Le hourdis a les mêmes dimensions que ci-dessus.

Les poutrelles aussi.

La poutre a ses armatures distantes de 0,71 *m* vertica-

lement, formées de deux fers ronds de 0,070 *m* de diamètre.

Le fer de l'armature supérieure de la poutrelle sera remonté de façon qu'il touche le dessous des fils de l'armature supérieure du hourdis.

Les fers de l'armature supérieure de la poutre seront placés juste au-dessous de l'armature supérieure de la poutrelle.

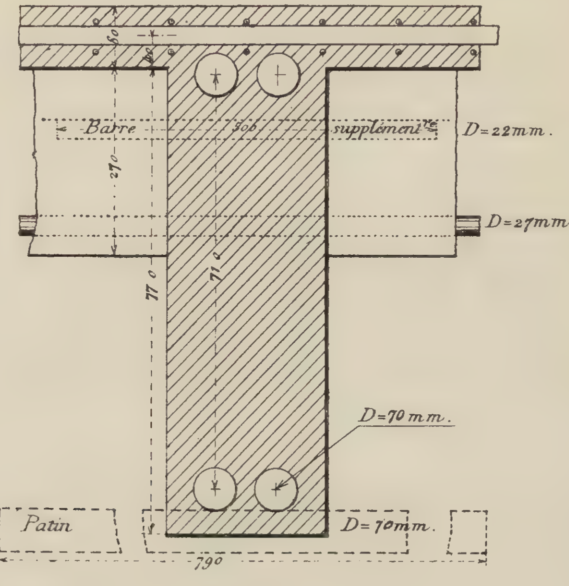


Fig. 45.

Cette combinaison aura pour effet de diminuer légèrement la saillie de la poutrelle sous le hourdis et d'augmenter la saillie de la poutre.

Les barres supplémentaires prendront place comme ci-dessus.

Ces deux exemples montrent que la méthode est générale.

2° *Pénétration des poutres dans les murs.* — Les poutres en ciment et leurs armatures doivent pénétrer dans les murs d'une quantité suffisante pour trouver une bonne assiette.

En règle générale la longueur de la pénétration se rapproche sensiblement de la distance h des armatures.

Les barres supplémentaires pénètrent de la même quantité h.

3° *Absence de soudures dans les barres.* — Les barres à employer doivent être d'un seul morceau, sans soudure. Le commerce fournit des barres de très grande longueur, de presque toutes les longueurs dont on peut avoir besoin. Mieux vaut payer un peu plus cher le kilogramme et avoir des barres d'une seule pièce. Au cas cependant où il ne pourrait en être ainsi, le raccord serait pratiqué à l'aide d'un manchon à vis ou de tout autre système présentant les mêmes garanties.

4° *Encoches dans les barres.* — Les extrémités des barres, sur une vingtaine de centimètres de longueur, recevront des encoches sur leur pourtour de façon à augmenter leur adhérence au béton et à fournir de bons scellements.

5° *Béton.* — La fabrication du ciment et la mise en œuvre seront l'objet d'une surveillance étroite. C'est, en effet, le point faible de la construction. Le béton doit être très homogène ; de plus, il est indispensable qu'il remplisse tous les vides et que, par suite, il soit soigneusement pilonné et ne présente aucune soufflure. L'extrémité de la poutre logée dans le mur reçoit à cet égard des soins tout particuliers.

6° *Coffrages pour le moulage des poutres, poutrelles et hourdis.* — Cette question se présente sous trois formes que nous allons examiner.

a). Les coffrages sont supportés par un échafaudage reposant sur le sol ou prenant appui sur les murs. Cette façon de procéder a l'immense avantage de procurer à la construction une homogénéité considérable, de constituer un bloc de l'ensemble de la construction. Mais elle coûte fort cher en raison du volume de bois à employer et à poser. C'est pour tenir compte de cette grande sujétion que nous avons précédemment attribué au béton en place le prix de 70 *fr* le mètre

cube, alors qu'il ne coûterait que 35 à 40 *fr* dans les circonstances ordinaires de pose.

b). Les coffrages sont suspendus aux poutres dont les fers, si besoin est, reçoivent un supplément de section pour pouvoir à eux seuls supporter les bois et le béton frais. Cette façon a été recommandée par M. Stellet (voir le numéro du journal *le Ciment* du 15 novembre 1897). L'idée est séduisante, car elle évite les échafaudages, mais elle présente bien des inconvénients.

Tout d'abord, les armatures appelées, au moment de la pose du béton, à supporter à la fois les coffrages et le béton frais, prennent, sous la triple influence de cette charge croissante, du poids des ouvriers et des apparaux et des coups de pilon ou de dame, une flèche qui va en grandissant et atteint plusieurs millimètres.

Ensuite, comme le béton est alors sans consistance et n'est pas encore adhérent au métal, il ne participe pas au travail de ce dernier, s'en sépare et tend à laisser le long des armatures un vide qui trouble singulièrement l'économie de la construction.

Puis, le fait qu'une flèche se dessine pendant la pose du béton, celui-ci qui n'a aucune cohésion paraît devoir se fissurer dans les parties tendues de la poutre en construction, ce qui n'est pas rassurant.

Enfin, comme la dessiccation ou la prise du béton a lieu sous cette flèche, il en résulte que les armatures n'ont pas une forme rectiligne, mais une forme curviligne dont les calculs n'ont pas tenu compte.

c). On remarquera que dans les calculs qui précèdent chaque élément du plancher est déterminé isolément. Il semble donc, par suite, que l'on peut le construire isolément. Si, comme quelques-uns l'ont avancé, on arrive à construire le hourdis, la poutrelle ou la poutre dans des usines comme les fers profilés du commerce ou comme les tuyaux en béton

comprimé, le prix du béton diminuera dans de grandes proportions et l'économie réalisée sera plus considérable encore. C'est là que paraît être la direction nouvelle que doit prendre le nouveau système.

Tout au moins pour les planchers de faible portée (5 à 6 *m* au maximum) composés de poutrelles et d'un hourdis, rien ne s'oppose à la pratique qui consisterait à fabriquer les poutres et le hourdis à l'usine ou sur le chantier. Outre que cette fabrication serait économique puisque les frais de moulage sont des moins importants, on pourrait, avant emploi, essayer séparément les éléments, les soumettre aux épreuves.

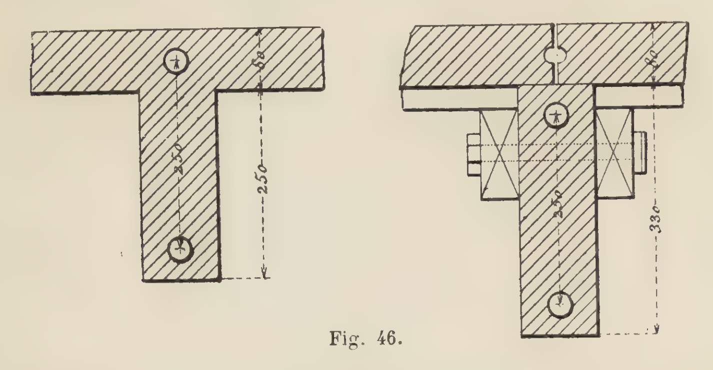


Fig. 46.

Toutefois les poutrelles, au lieu d'être incorporées au hourdis dans leur partie supérieure, comme on l'a supposé dans les calculs, devraient être placés sous ce dernier et le hourdis serait un simple dallage posé sur les poutrelles. Dans ce système, il est vrai, la hauteur totale du plancher serait augmentée de l'épaisseur du hourdis et il conviendrait de calculer ce dernier comme simplement posé, ce qui augmenterait un peu le poids de ses armatures. Les dalles recevraient sur leurs faces verticales une rainure de façon à faire un joint solide par un coulis de mortier de ciment.

d). On pourrait enfin employer un système mixte qui consisterait à confectionner les poutres à l'usine, à les munir de trous permettant d'y passer des boulons pour maintenir

des pièces de bois destinées à supporter un plancher pour construire sur place le hourdis (fig. 46).

7° *Maintien des distances respectives des armatures.* — Les armatures qui apportent la résistance aux poutres en béton

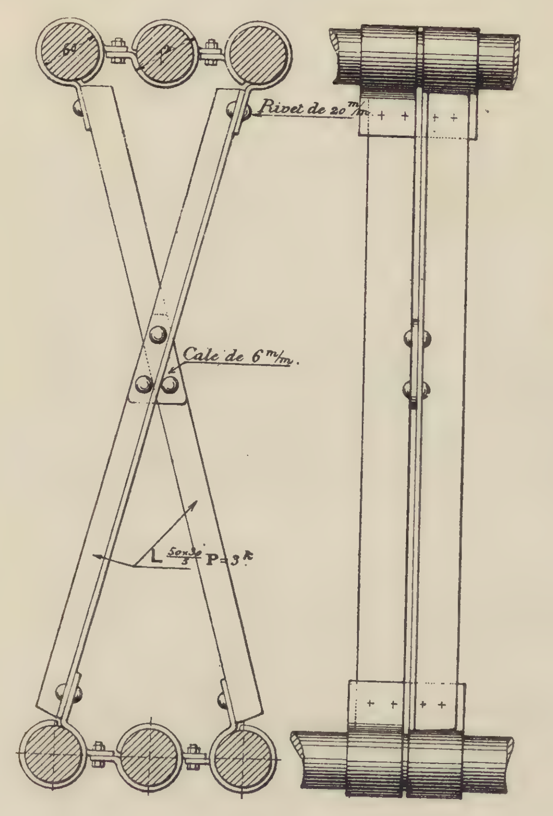


Fig. 47.

de ciment armé doivent être incorporées dans la masse du béton aux endroits exacts que l'on a supposés dans les calculs ; c'est une condition *sine qua non* de la bonne réussite de la construction. Un grand nombre de systèmes sont employés. Les gabarits mis en usage pour cela doivent réunir les conditions suivantes :

a). Etre en partie démontables, c'est-à-dire qu'autant que possible ils doivent pouvoir être enlevés au moins en partie ;

b). Ne pas créer une section de rupture de la poutre, c'est-à-dire que les parties de ces gabarits qui restent incorporées dans le béton ne doivent occuper qu'une faible partie de la section.

8° *Liaison des armatures.* — Nous nous sommes déjà expliqué sur ce point. Nous n'attribuons, dans les petites poutres, qu'une influence très faible, sinon nulle, aux liaisons des armatures entre elles. C'est à l'expérience à se prononcer sur cette question. Dans les grandes poutres, au contraire, où le prisme médian du béton est éloigné des armatures, il paraît nécessaire de réunir ces dernières par des liaisons traversant ce prisme et le rendant solidaire des armatures. La figure 47 montre un fer en X de forme rigide, composé de cornières et qui se place à mi-distance des poutrelles.

CHAPITRE VI

ABAQUES REPRÉSENTATIFS DES FORMULES

Transformation des formules. — Les formules principales que nous avons rencontrées pour le calcul des fers des armatures sont les suivantes :

$$R.S.h = M \tag{24}$$

$$S = \frac{pl^2}{108 \times 10^6 \times h} \tag{25 bis}$$

$$S = \frac{pl^2}{72 \times 10^6 \times h} \tag{27 bis}$$

Les calculs auxquels elles donnent lieu sont, à la vérité, assez faciles, mais néanmoins on peut encore simplifier les recherches en construisant leurs abaques.

Pour arriver à ce dernier résulat, nous allons leur faire subir quelques transformations.

Dans la formule 24, nous introduirons l'hypothèse $R = 9 \times 10^6$, elle devient

$$9 \times 10^6 \times S.h = M \tag{24 bis}$$

Dans les formules (24 *bis*), (25 *bis*) et (27 *bis*), nous introduirons les hypothèses dans lesquelles nous nous sommes toujours placés au cours de cette étude, savoir :

$$1^o \quad \frac{2r}{h} \text{ ou } \frac{d}{h} = \frac{1}{10}$$

d étant le diamètre des barres

$$2^o \quad S = \frac{N}{2} \cdot \pi \frac{d^2}{4}$$

On obtient ainsi :

α. pour la formule (24 *bis*)

$$9 \times 10^6 \times \frac{N}{2} \times \pi \times \frac{d^2}{4} \times 10 \times d = M$$

ou en effectuant les calculs

$$M = 35\,343\,000 . N . d^3 \qquad (24\ ter)$$

β. pour la formule (25 *bis*)

$$\frac{N}{2} \times \pi \times \frac{d^2}{4} = \frac{pl^2}{108 \times 10^7 \times d}$$

ou en effectuant les calculs

$$pl^2 = 424\,116\,000 . Nd^3 \qquad (25\ ter)$$

γ. pour la formule (27 *bis*)

$$\frac{N}{2} \times \pi \times \frac{d^2}{4} = \frac{pl^2}{72 \times 10^7 \times d}$$

ou en effectuant les calculs

$$pl^2 = 282\,744\,000 \times N \times d^3 \qquad (27\ ter)$$

Nous nous proposons de rechercher les abaques des formules 24 *bis*, 24 *ter*, 25 *ter* et 27 *ter*.

Méthode générale de construction des abaques. — Dans le numéro des *Nouvelles Annales de la Construction* portant la date d'août 1897, M. Dariès a indiqué le principe de la méthode qui convient dans notre espèce.

Nous la rappellerons sommairement.

Soit AM, BS deux droites parallèles (fig. 48).

Si deux ordonnées

$$CA = \mu$$
$$BD = \sigma$$

satisfont constamment à la relation

$$\alpha\mu + \beta\sigma = \gamma$$

α, β et γ étant des constantes, les droites telles que CD forment un faisceau autour d'un point fixe O.

Soit une autre droite C′D′ pour laquelle on a

$$AC' = \mu'$$
$$BD' = \sigma'$$

et

$$\alpha\mu' + \beta\sigma' = \gamma$$

O, intersection des deux droites, est constant. Menons par O une parallèle à AB et une parallèle à AM.

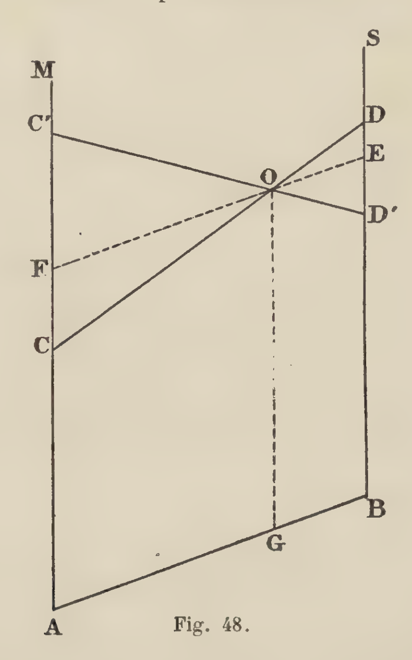


Fig. 48.

Les deux triangles semblables CC′O et DD′O donnent la relation

$$\frac{FO}{OE} = \frac{CC'}{DD'}$$

Or, si l'on retranche membre à membre les deux équations précédentes il vient

$$\alpha(\mu - \mu') = \beta(\sigma' - \sigma)$$

ou

$$\frac{\mu - \mu'}{\sigma' - \sigma} = \frac{CC'}{DD'} = \frac{\beta}{\alpha}$$

d'où

$$\frac{FO}{OE} = \frac{\beta}{\alpha}$$

D'autre part, les triangles semblables CFO et DOE donnent

$$\frac{FC}{DE} = \frac{FO}{OE} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ou

$$\frac{OG - \mu}{\sigma - OG} = \frac{\beta}{\alpha}$$

d'où

$$OG = \frac{\alpha\mu + \beta\sigma}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$$

Ces relations montrent que le point O est fixe puisqu'il se trouve sur une droite OG parallèle aux axes et de position déterminée par la relation $\frac{FO}{OE} = \frac{\beta}{\alpha}$ et qu'il est à une distance constante $OG = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$ de l'axe AB.

Cela posé, si l'on porte sur AM, GO, BD, parallèles, et à des distances telles que $\frac{AG}{GB} = \frac{\beta}{\alpha}$, des longueurs proportionnelles à μ, σ et $\frac{\gamma}{\alpha + \beta}$, on obtiendra trois points en ligne droite sur une même transversale.

On en déduit que si l'on joint par une ligne droite deux points, cotés μ et σ, la rencontre de cette droite avec le troisième axe donnera la cote $\frac{\gamma}{\alpha + \beta}$.

Tel est le principe sur lequel nous allons nous appuyer.

Construction de la formule 24 bis. — Nous allons prendre la formule générale (24 *bis*).

$$M = 9 \times 10^6 \times S \times h$$

ou

$$M = 9 \times S \times h$$

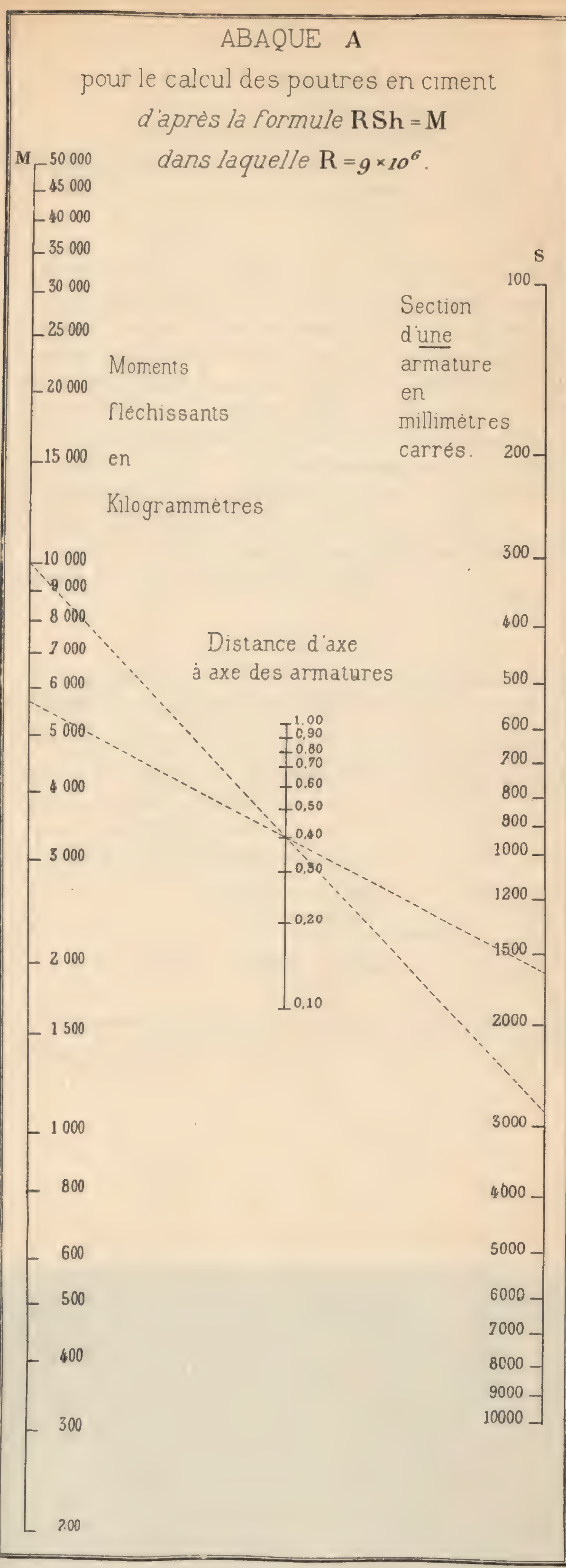
dans laquelle M est exprimé en kilogrammètres, h en mètres et S en millimètres carrés.

Pour la ramener à la forme type.

$$\alpha\mu + \beta\sigma = \gamma$$

nous prendrons les logarithmes des deux membres

$$\log M = \log 9 + \log S + \log h$$



En face de la page 148.

ou

$$\log M + (-\log S) = \log 9 + \log h$$

Comparée à l'équation type, on a

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 1 \qquad \gamma = \log 9 + \log h$$
$$\mu = \log M \qquad \sigma = -\log S$$

Menons deux axes parallèles M et S séparés par une distance arbitraire que nous choisirons égale à 0,09 *m* (abaque A ci-contre). Sur l'axe M, on portera à partir d'une origine également arbitraire des ordonnées ayant pour valeurs les logarithmes des nombres consécutifs de 200 à 50000 (kilogrammètres). Sur l'axe S, onportera à partir d'une origine arbitraire des ordonnées ayant pour valeurs les logarithmes des nombres consécutifs de 100 à 10 000 (millimètres carrés). Toutefois, le logarithme de S étant affecté du signe —, la graduation de S est en sens inverse de celle de M.

L'axe des *h*, situé entre les deux précédents, est à égale distance de chacun d'eux car le rapport

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Pour graduer cet axe, on attribuera à *h* différentes valeurs qui permettront, pour chacune d'elles de déterminer γ et par suite $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ qui est l'ordonnée du point correspondant de l'axe des *h* à partir de la ligne qui joint les origines des graduations des deux premiers axes.

h oscillera entre 0,10 et 1 *m*.

Comme exemple, prenons $h = 0{,}40$

$$\begin{aligned} \gamma = \log 9 \quad &= 0{,}9542 \\ + \log 0{,}40 &= \bar{1}{,}6020 \\ &= \overline{\phantom{0{,}0000}} \quad 0{,}5562 \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{0{,}5562}{2} = 0{,}2781.$$

On trouverait semblablement toutes les ordonnées $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ pour les diverses valeurs de *h*.

Le mode d'emploi de l'abaque est dès lors fort simple. Si l'on trace une transversale qui coupe les trois axes, on trouve trois valeurs de M, S et h qui satisfont à l'équation 24 *bis*. Ou si l'on donne deux quelconques de ces trois quantités M, S, h, en tirant la transversale joignant les deux quantités connues, cette transversale rencontre le troisième axe en un point dont la graduation indique la valeur cherchée de la troisième quantité.

Ainsi, si l'on se donne $M = 10\,000$, $h = 0{,}40\,m$, la transversale coupe l'axe des S entre 2 000 et 3 000 vers le point 2 800 mm^2. L'application directe de la formule 24 *bis* donne

$$10\,000 = 9 \times S \times 0{,}40$$
$$S = 2\,778\ mm^2$$

Construction de la formule 24 ter. — La formule 24 *ter*

$$M = 35{,}343000 . N .\ d^3,$$

d étant exprimé en centimètres se ramène à la forme type

$$\alpha\mu + \beta\sigma = \gamma$$

en prenant les logarithmes des deux membres

$$\log M = \log 35{,}343000 . + \log N + 3 \log d$$

ou

$$\log M + 3 \times (-\log d) = \log 35{,}343000 + \log N$$

comparée à l'équation type elle donne

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 3 \qquad \gamma = \log 35{,}343000 + \log N$$
$$\mu = \log M \qquad \sigma = -\log d$$

Menons deux axes parallèles M et d séparés par une distance arbitraire que nous choisirons égale à $0{,}10\,m$ (abaque B ci-après). Sur l'axe M, à partir d'une origine quelconque, on portera des ordonnées ayant pour valeurs les logarithmes des nombres consécutifs de 300 à 50 000 (kilogrammètres).

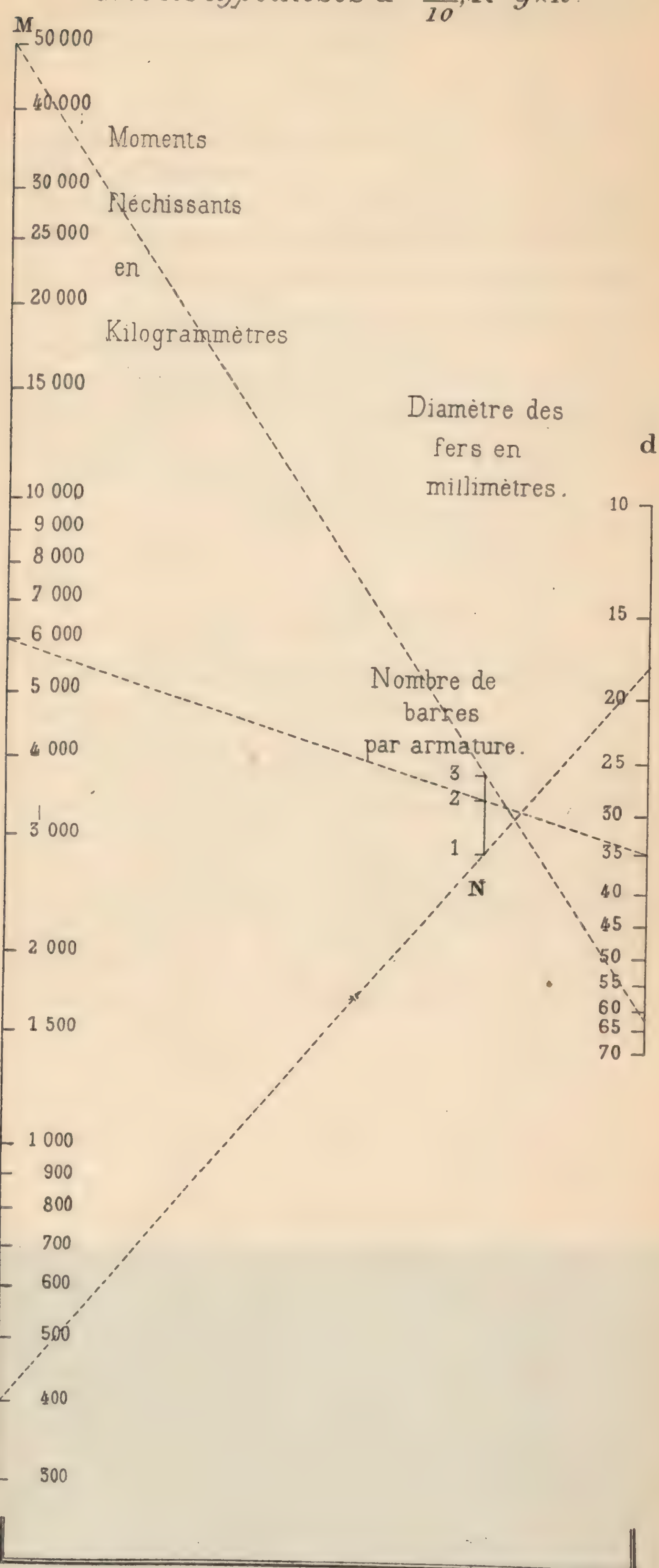
Sur l'axe d, on portera à partir d'une origine arbitraire des ordonnées ayant pour valeurs les logarithmes des nombres consécutifs de 1 à 7 (centimètres).

ABAQUE B

pour le calcul des poutres en ciment

d'après la formule $\mathbf{M} = 35.343\,000\,\mathbf{N}\mathbf{d}^3$

avec les hypothèses $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{h}}{10}$, $\mathbf{R} = 9 \times 10^6$



En face de la page 150.

Toutefois log d étant précédé du signe —, cette dernière graduation aura lieu en sens inverse de la première.

L'axe des N, situé entre les deux précédents, est distant de chacun d'eux dans la proportion

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{1}$$

c'est-à-dire qu'il est distant de 0,075 m de l'axe des M et de 0,025 m de l'axe des d.

Pour graduer l'axe des N, on attribuera à N des valeurs successives pour chacune desquelles on déterminera la valeur de γ et par suite de $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ qui est l'ordonnée du point correspondant de l'axe des N à partir de la ligne qui joint les zéros des graduations des deux premiers axes.

Nous n'attribuerons à N que trois valeurs : 2, 4 et 6 qui sont les seules pratiques et qui correspondent à 1, 2 ou 3 fers par armature.

Comme exemple prenons $N = 2$

$$\begin{aligned} \gamma &= \log 35{,}343000 = 1{,}5483 \\ &+ \log 2 \qquad + 0{,}3010 \\ &\qquad\qquad = \text{———} 1{,}8493 \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{1{,}8493}{1 + 3} = 0{,}4623.$$

On trouverait semblablement toutes les ordonnées de $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ pour les deux autres valeurs de N.

Le mode d'emploi de l'abaque est le suivant :

1° Si l'on trace une transversale qui coupe les trois axes M, d, N. les trois graduations rencontrées sont trois nombres qui satisfont à l'équation 24 *ter*.

2° Si l'on mène une transversale qui passe par une division des M ou des d et par une des valeurs de N, on obtient sur le troisième axe un nombre qui est la valeur cherchée de d ou M.

Ainsi, si l'on se donne $M = 6000$ et $N = 4$, la transversale

passant par ces deux points coupe l'axe des *d* vers 0,035 *m*.

L'application directe de la formule 24 *ter* donne

$$6\,000 = 35{,}343 \times 4 \times d^3$$
$$d^3 = \frac{6\,000}{141{,}372} = 42{,}441 \ cc$$
$$d = 35 \ mm.$$

Construction de la formule 25 ter. — La formule 25 *ter*

$$pl^2 = 424{,}116000.Nd^3$$

d étant exprimé en centimètres, se ramène à la forme type

$$\alpha\mu + \beta\sigma = \gamma$$

en prenant les logarithmes de ses deux membres

$$\log p + 2 \log l = \log 424{,}116 + \log N + 3 \log d$$

comparée à l'équation type, elle donne

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = \log 424{,}116 + \log N + 3 \log d$$
$$\mu = \log p \qquad \sigma = \log l$$

En attribuant à N, successivement les trois valeurs pratiques 2, 4 et 6, on obtiendra ainsi trois abaques (abaques C, D, E). On pourrait réunir ces trois abaques en un seul, mais d'un tracé plus compliqué et d'une commodité moins grande.

La construction de ces trois abaques donne lieu à une portion commune du tracé et ne diffère que vers la fin.

Menons deux axes parallèles *p* et *l* séparés par une distance arbitraire que nous choisirons égale à 0,09 *m*.

Sur l'axe *p*, à partir d'une origine quelconque, on portera des ordonnées ayant pour valeurs les logarithmes des nombres consécutifs de 200 à 20 000 (kilogrammes).

Sur l'axe *l*, on portera à partir d'une origine arbitraire des ordonnées ayant pour valeurs les logarithmes des nombres consécutifs de 1 à 15 (mètres).

Les deux graduations ont le même sens.

L'axe des *d*, situé entre les deux précédents est distant de chacun d'eux dans la proportion

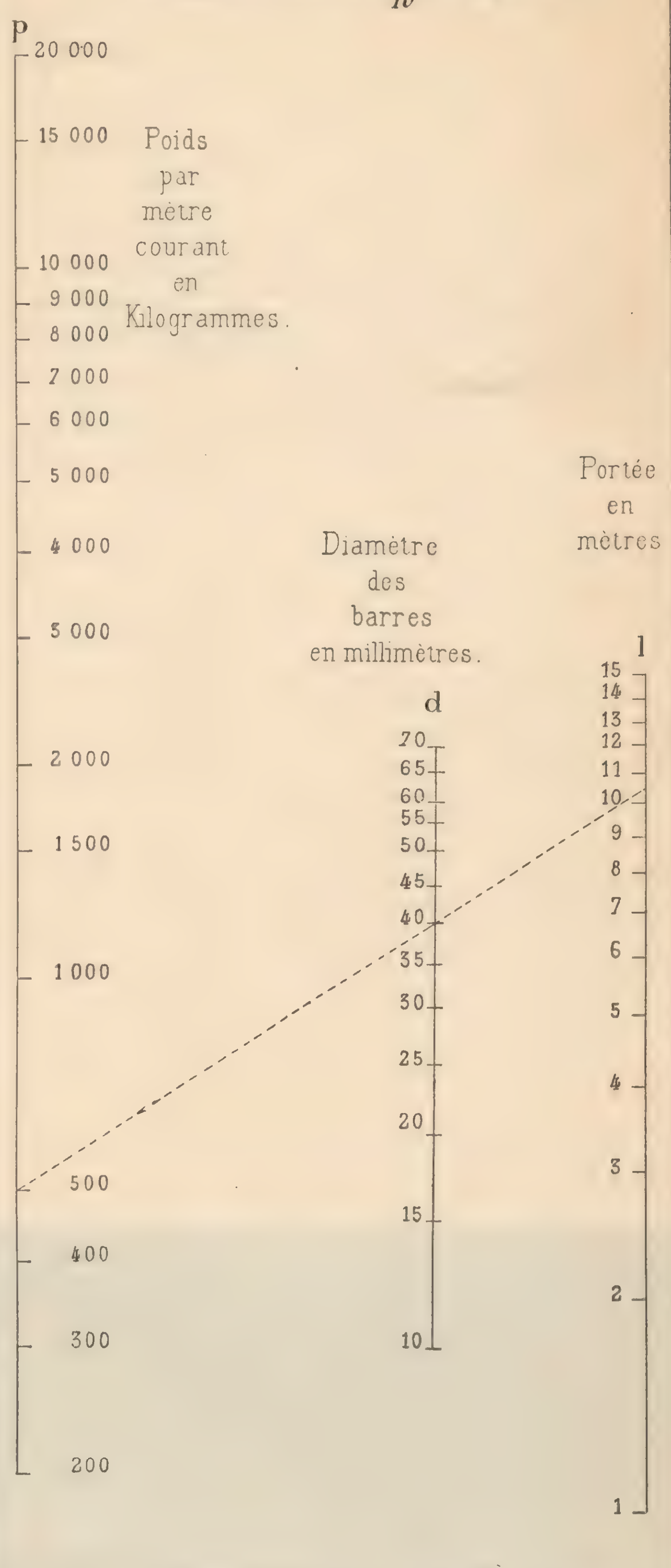
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{1},$$

ABAQUE C

pour le calcul des poutres en ciment qui sont encastrées et n'ont q'un seul fer par armature

d'après la formule $pl^2 = 848.232.000\ d^3$.

avec les hypothèses $d = \frac{h}{10}$, $R = 9 \times 10^6$.



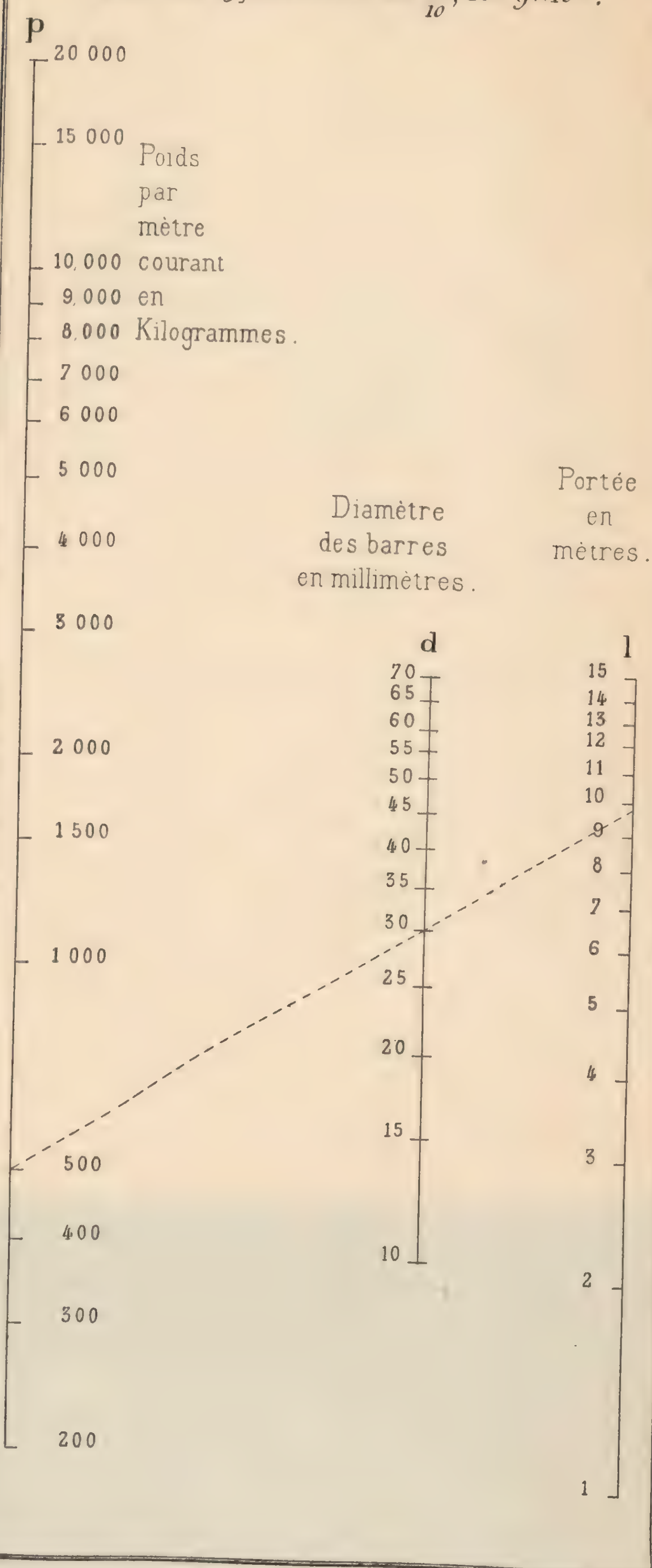
En face de la page 152. — I.

ABAQUE D

pour le calcul des poutres en ciment qui sont encastrées et ont 2 fers par armature *ou qui sont simplement posées* et ont 3 fers par armature.

d'après la formule $pl^2 = 1.696.464.000\, d^3$

avec les hypothèses $d = \frac{h}{10}$, $R = 9 \times 10^6$.

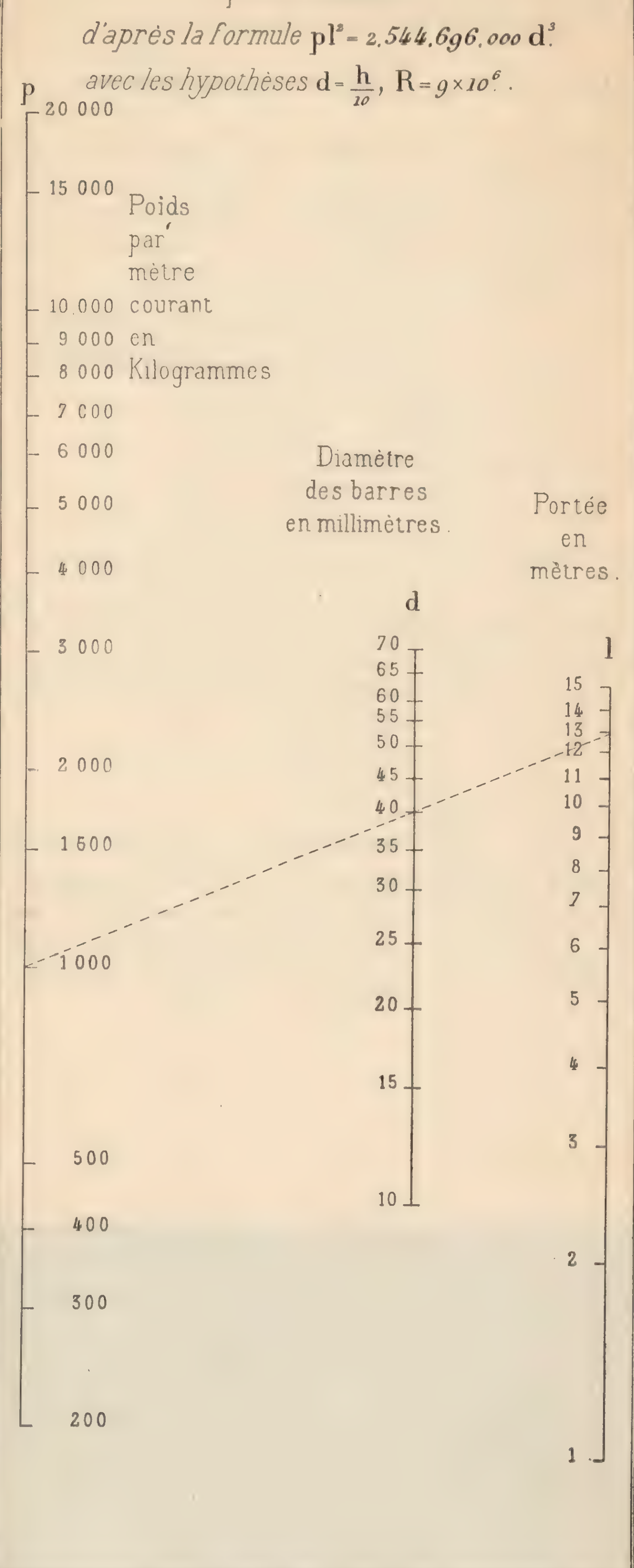


ABAQUE E

pour le calcul des poutres en ciment qui sont encastrées et ont 3 fers par armature.

d'après la formule $pl^2 = 2.544.696.000\ d^3$.

avec les hypothèses $d = \frac{h}{10}$, $R = 9 \times 10^6$.



c'est-à-dire qu'il est éloigné de 0,06 m de l'axe des p et de 0,03 m de l'axe des l.

Jusqu'ici, les opérations de graduation des axes p et l et de position de l'axe d sont communes à toutes les valeurs de N. C'est la graduation de l'axe d qui est différente suivant ces valeurs de N.

Nous attribuerons donc à N successivement les valeurs 2, 4 et 6.

a. N = 2 (abaque C). Pour graduer l'axe d, nous donnerons à d des valeurs successives comprises entre 0,01 et 0,07 m et pour chacune desquelles on déterminera la valeur de γ et par suite celle de $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ qui est l'ordonnée correspondante de l'axe d à partir de la ligne qui joint les origines des graduations des deux autres axes.

Comme exemple, prenons $d = 0,04\ m$.

$$\begin{aligned} \gamma = \log 424,116 &= 2,6275 \\ + \log 2 \quad & + 0,3010 \\ + 3 \log d \quad & \underline{\quad 1,8060} \\ & = \quad 4,7345 \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{4,7345}{1+2} = 1,5782.$$

On trouverait semblablement toutes les ordonnées $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ pour les diverses valeurs de d.

b. N = 4 (abaque D). Si l'on répète le calcul précédent dans le cas de N = 4, il est facile de se rendre compte que la valeur de γ augmente de la différence entre

$$\begin{aligned} \log 4 &= 0,6020 \\ \text{et } \log 2 &= \underline{0,3010} \\ \text{Soit de } & \quad 0,3010 \end{aligned}$$

et que l'ordonnée $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ augmente de $\frac{0,301}{3} = 0,100$.

L'abaque relatif à N = 4 sera donc identique à celui de N = 2, sauf que l'axe des d sera relevé par rapport aux deux autres axes de la quantité 0,10.

c. N = 6 (abaque E). Si l'on répète le calcul relatif à la

graduation de l'axe d, fait plus haut pour $N = 2$, dans le cas où $N = 6$, on trouve que γ augmente de la différence entre

$$\begin{array}{rl} \log 6 = & 0{,}7781 \\ \text{et } \log 2 = & \underline{0{,}3010} \\ \text{Soit de} & 0{,}4771 \end{array}$$

et que l'ordonnée $\dfrac{\gamma}{\alpha + \beta}$ augmente de $\dfrac{0{,}4771}{3} = 0{,}16$.

Ce qui revient à remonter l'axe des d à la quantité 0,16.

L'abaque relatif à $N = 6$ sera donc identique à celui de $N = 2$, sauf que l'axe des d sera relevé par rapport aux deux autres axes de la quantité 0,16.

Construction de la formule 27 ter. — La formule 27 *ter*

$$pl^2 = 282{,}744\ Nd^3$$

d étant exprimé en centimètres, se ramène à la forme type

$$\alpha\mu + \beta\sigma = \gamma$$

en prenant les logarithmes des deux membres

$$\log p + 2 \log l = \log 282{,}744 + \log N + 3 \log d$$

comparée à la formule type, elle donne

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = \log 282{,}744 + \log N + 3 \log d$$
$$\mu = \log p \qquad \sigma = \log l$$

comme dans le cas précédent, en attribuant à N successivement les trois valeurs pratiques 2, 4 et 6, on obtiendra trois abaques.

Mais ces abaques se déduisent immédiatement des trois précédents comme on va le voir.

En effet, les deux formules anamorphosées logarithmiquement

$$\log p + 2 \log l = \log 424{,}116 + \log N + 3 \log d$$

et

$$\log p + 2 \log l = \log 282{,}744 + \log N + 3 \log d$$

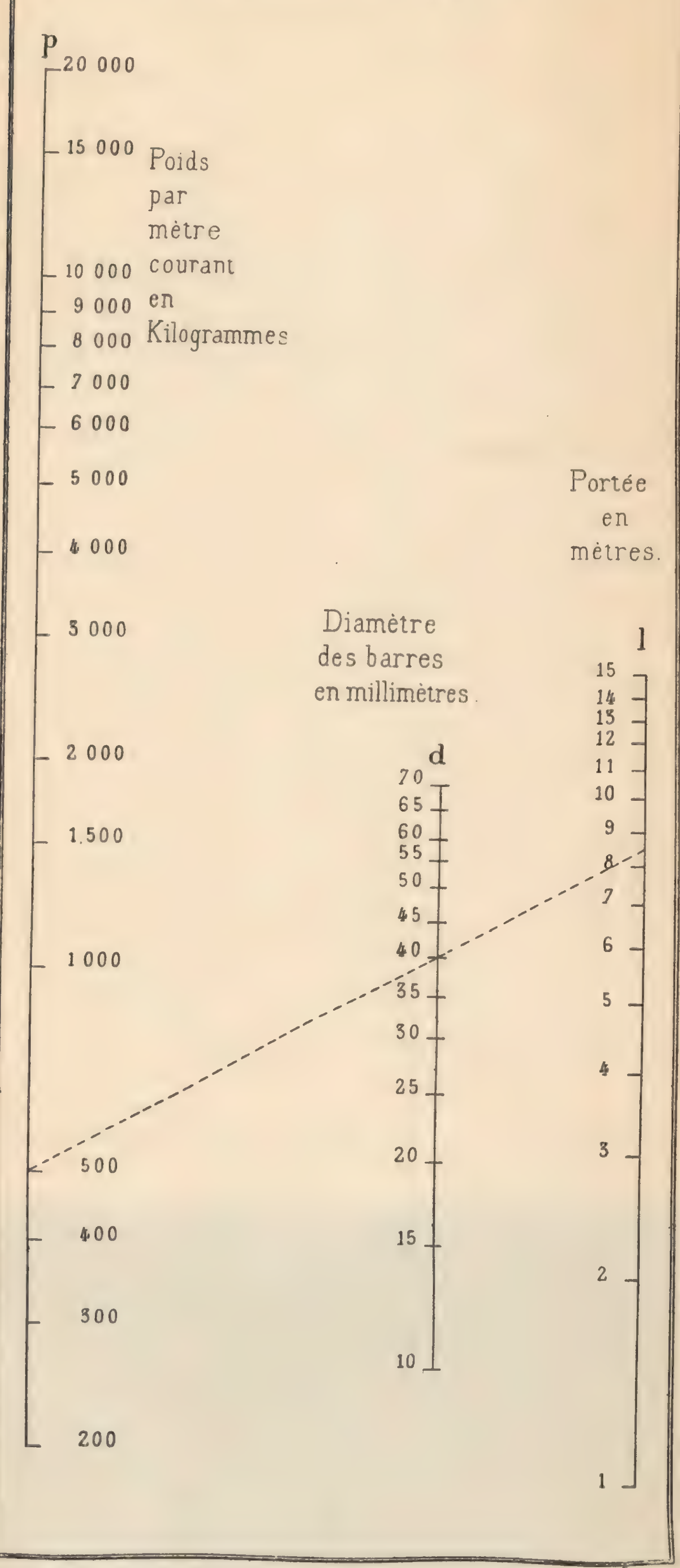
donnent lieu aux mêmes graduations pour les axes p et l, donnent lieu à la même valeur du rapport $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{2}{1}$, par suite à

ABAQUE **F**

pour le calcul des poutres en ciment qui sont simplement posées et ont 1 fer par armature

d'après la formule $pl^2 = 565\,488\,000\,d^3$

avec les hypothèses $d = \frac{h}{10}$, $R = 9 \times 10^6$



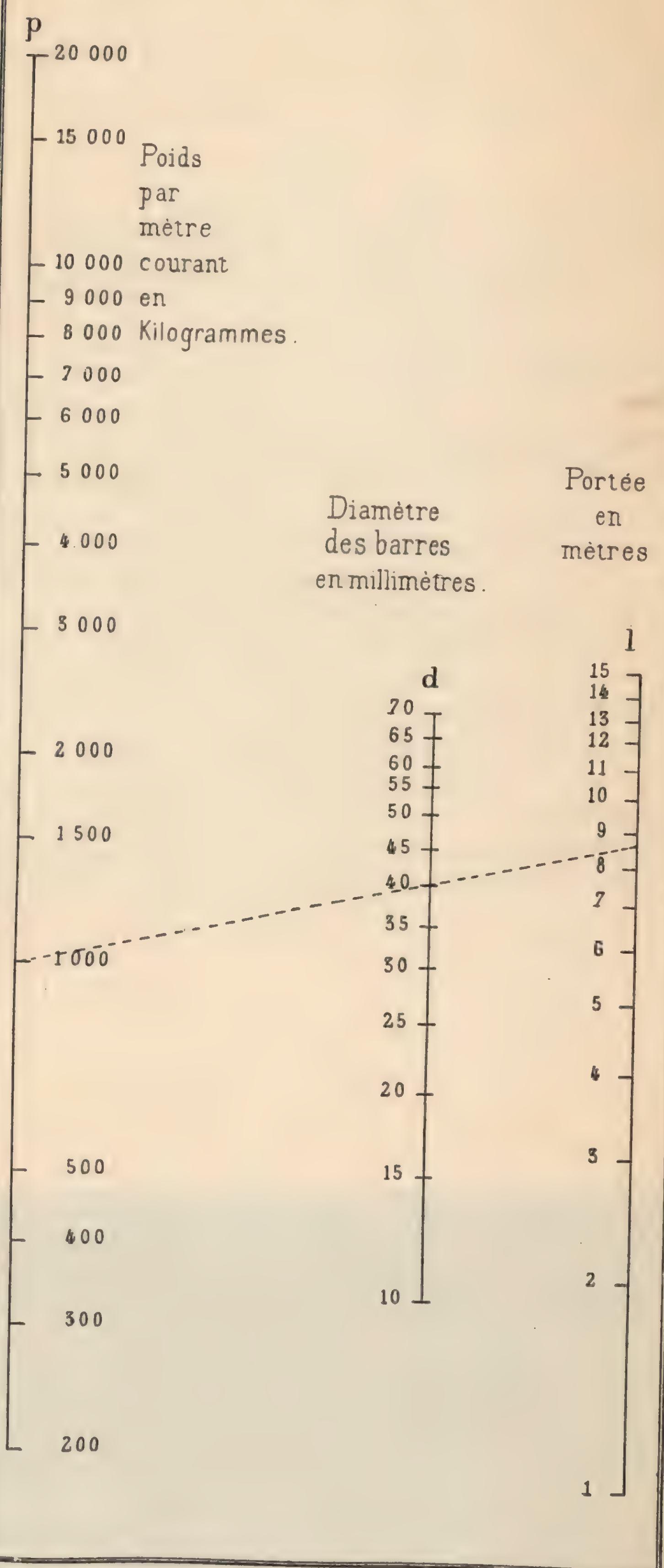
En face de la page 154. — I.

ABAQUE G

pour le calcul des poutres en ciment qui sont simplement posées et ont 2 fers par armature

d'après la formule $pl^2 = 1130\,976\,000\,d^3$

avec les hypothèses $d = \frac{h}{10}$; $R = 9 \times 10^6$



En face de la page 154. — II.

la même position de l'axe de d par rapport aux deux autres.

Il ne reste que la graduation de l'axe dont les ordonnées sont respectivement

$$\frac{\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{\log 424{,}116 + \log N + 3 \log d}{3}$$

et

$$\frac{\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{\log 282{,}744 + \log N + 3 \log d}{3}$$

La différence de ces deux ordonnées est évidemment égale à

$$\frac{\log 424{,}116 - \log 282{,}744}{3} = \frac{0{,}1761}{3} = 0{,}059$$

Soit 0,06.

c'est-à-dire qu'on déduira les trois abaques de la formule 27 *ter* des trois abaques de la formule 25 *ter* en abaissant, dans chacun de ces derniers, l'axe des d de la quantité 0,06 m.

Il est d'ailleurs à remarquer que l'abaque de la formule 25 *ter* pour $N = 4$ et celui de la formule 27 *ter* pour $N = 6$ sont identiques (abaque D).

De sorte que pour la formule 27 *ter* nous n'avons construit que les deux abaques pour $N = 2$ (abaque F) et $N = 4$ (abaque G).

L'usage des abaques provenant des formules 25 *ter* et 27 *ter* est le même que celui des précédents.

1° Toute transversale qui rencontre les trois axes parallèles donne trois nombres qui satisfont soit à l'équation 25 *ter*, soit à l'équation 27 *ter* suivant le cas ;

2° Si l'on mène une transversale qui passe par une division de p et de d par exemple, elle rencontre l'axe des l sur un point de la graduation qui est le nombre cherché.

Ainsi, si l'on donne $p = 500$, $d = 0{,}040$ m, la transversale passant par ces deux points coupe l'axe des l entre 10 et 11 m, vers 10,40 m dans l'abaque relatif à la formule 25 *ter* avec $N = 2$.

L'application directe de la formule 25 *ter* donne

$$500 \times l^2 = 424{,}116 \times 2 \times (4)^3$$

$$l^2 = \frac{424{,}116 \times 2 \times (4)^3}{500}$$

$$l = 10{,}40\ m.$$

Applications. — Les abaques permettent de résoudre avec une très grande rapidité les problèmes relatifs aux armatures.

1er Ex. — On veut couvrir une portée de 6 *m* avec des poutres à deux fers par armature devant supporter 1000 *kg* par mètre courant. Quel sera le diamètre des fers?

L'abaque D répond de suite à la question : la transversale 6 *m* — 1 000 *kg* donne $d = 0{,}028\ m$ pour le cas d'encastrement.

Si la poutre ne doit pas être encastrée, l'abaque G donne $d = 0{,}033\ m$.

Ceci suppose que la distance d'axe en axe des armatures est de 0,33 *m*.

2e Ex. — Une poutre est construite avec des fers dont la section par armature est de 1 000 mm^2 et dont la distance d'axe en axe des armatures est de 0,50 *m*, à quel moment, fléchissant au milieu, peut-elle résister?

L'abaque (A) répond de suite à la question. La transversale 1 000 mm^2 — 0,50 *m* donne M = 4 500.

3e Ex. — Pour poutreller un plancher on dispose de fers de 0,020 *m* ; le plancher doit être chargé de façon à amener par mètre courant de poutrelle un poids de 400 *kg*. On demande quelle doit être la portée des poutrelles, ou ce qui revient au même, la distance des poutres ?

Les poutrelles seront encastrées si l'on emploie un fer par armature, l'abaque C donne pour la portée cherchée 4,20 *m* environ. Si l'on emploie deux fers, l'abaque D donne 5,70 *m*.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE II

CHAPITRE III

CHAPITRE VI

ABAQUES

CATALOGUE DE LIVRES

SUR

LA CONSTRUCTION

LES TRAVAUX PUBLICS ET L'ÉLECTRICITÉ

PUBLIÉS PAR

LA LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, BAUDRY ET Cie

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, A PARIS

Le catalogue complet est envoyé franco sur demande.

CONSTRUCTION ET TRAVAUX PUBLICS

Annales de la Construction.

Nouvelles Annales de la Construction, fondées par OPPERMANN. — 12 livraisons par an, formant un beau volume de 50 à 60 planches et 200 colonnes de texte.

Abonnements : Paris, 15 fr. — Départements et Belgique, 18 fr. — Union postale, 20 fr.

Prix de l'année parue, reliée, 20 fr.

Table des matières des années 1876 à 1887, 1 brochure in-12. . 0 fr. 50

Portefeuille des machines.

Portefeuille économique des machines, de l'outillage et du matériel, relatifs à la construction, à l'industrie, aux chemins de fer, aux routes, aux mines, à la navigation, à l'électricité, etc. ; contenant un choix des objets les plus intéressants des expositions industrielles ; fondé par OPPERMANN. 12 livraisons par an, formant un beau volume de 50 à 60 planches et 200 colonnes de texte.

Abonnements : Paris, 15 fr. — Départements et Belgique, 18 fr. — Union postale . . . . 20 fr.

Prix de l'année parue, reliée . . . . 20 fr.

Table des matières des années 1876 à 1887. . . . . 0 fr. 50

Agenda Oppermann.

Agenda Opperman paraissant chaque année. Elégant carnet de poche contenant tous les chiffres et tous les renseignements techniques d'un usage journalier. Rapporteur d'angles, coupe géologique du globe terrestre, guide du métreur. — Résumé de geódésie. — Poids et mesures, monnaies françaises et étrangères. Renseignements mathématiques et

géométriques. — Renseignements physiques et chimiques. — Résistance des matériaux. — Electricité. — Règlements administratifs. — Dimensions du commerce. — Prix courants et séries de prix. — Tarifs des Postes et Télégraphes.

Relié en toile, 3 fr. ; en cuir, 5 fr. — Pour l'envoi par la poste, 0 fr. 25 en plus.

Aide-Mémoire de l'ingénieur.

Aide-mémoire de l'ingénieur. Mathématiques, mécanique, physique et chimie, résistance des matériaux, statique des constructions, éléments des machines, machines motrices, constructions navales, chemins de fer, machines-outils, machines élévatoires, technologie, métallurgie du fer, constructions civiles, législation industrielle. Troisième édition française du Manuel de la Société « Hütte », par Philippe Huguenin. 1 volume in-12 contenant plus de 1200 pages, avec 500 figures dans le texte, solidement relié en maroquin. . . . . 15 fr.

Aide-mémoire des conducteurs des ponts et chaussées.

Aide-mémoire des conducteurs et commis des ponts et chaussées, agents voyers, chefs de section, conducteurs et piqueurs des chemins de fer, contrôleurs des mines, adjoints du génie, entrepreneurs et, en général, de toute personne s'occupant de travaux, par J. Eug. Petit, conducteur des ponts et chaussées. 1 volume in-12, avec de nombreuses figures dans le texte, solidement relié en maroquin . . . . 15 fr.

Traité de constructions civiles.

Traité de constructions civiles. Fondations, maçonnerie, pavages et revêtements, marbrerie, vitrerie, charpente en bois et en fer, couverture, menuiserie et ferrures, escaliers, monte-plats, monte-charges et ascenseurs, plomberie d'eau et sanitaire, chauffage et ventilation, décoration. éclairage au gaz et à l'électricité, acoustique, matériaux de construction, résistance des matériaux, renseignements généraux, par E. Barberot. architecte. 1 volume in-8°, avec 1554 figures dans le texte dessinées par l'auteur. Relié . . . . 20 fr.

Cours de construction.

Cours pratique de construction, rédigé conformément au programme officiel des connaissances pratiques exigées pour devenir ingénieur. Terrassements, — ouvrages d'art, — conduite des travaux, — matériel, — fondations, — dragage, — mortiers et bétons, — maçonnerie, — bois, — métaux, — peinture, — jaugeage des eaux, — règlements des usines, etc., par Prud'homme. 4e édition. 2 volumes in-8°, avec 363 figures dans le texte. . 16 fr.

Maçonnerie.

Architecture et constructions civiles. Maçonnerie ; pierres et briques ; leur emploi dans les maçonneries ; proportion des murs ; fondations ; murs de cave et murs en élévation ; des moulures et des ordres ; décoration des murs extérieurs des édifices ; cloisons, planchers, voûtes ; escaliers en maçonnerie ; éléments de décoration intérieure ; revêtement des sols ; roches naturelles ; chaux et ciments ; du plâtre, produits céramiques, par J. Denfer, architecte, professeur à l'Ecole centrale. 2 volumes grand in-8°, avec 794 figures dans le texte. . . . . 40 fr.

Charpente en bois et menuiserie.

Architecture et constructions civiles. Charpente en bois et menuiserie : les bois, leurs assemblages ; résistance des bois ; tableaux, calculs faits ; linteaux et planchers ; pans de bois ; combles ; étaiements, échafaudages, appareils de levage : travaux hydrauliques, cintres, ponts et passerelles en bois ; escaliers ; menuiserie en bois ; parquets, lambris, portes, croisées, persiennes, devantures, décoration, par J. Denfer, architecte, professeur à l'Ecole centrale. 1 volume grand in-8°, avec 680 figures dans le texte . . . . 25 fr.

Terrassements, tunnels, etc.

Procédés généraux de construction. Travaux de terrassements, tunnels, dragages et dérochements, par Ernest PONTZEN. 1 volume grand in-8°, avec 234 figures dans le texte. . . . . 25 fr.

Le bouclier dans la construction des souterrains.

Emploi du bouclier dans la construction des souterrains, par Raynald LEGOUËZ, ingénieur des ponts et chaussées, détaché au service des égouts de la Ville de Paris. 1 volume in-8°, avec 337 figures dans le texte, relié. 20 fr.

Mesurage et métrage.

Traité pratique et complet de tous les mesurages, métrages, jaugeages de tous les corps, appliqué aux arts, aux métiers, à l'industrie, aux constructions, aux travaux hydrauliques, aux nivellements pour construction de routes, de canaux et de chemins de fer, drainage, etc., enfin à la rédaction de projets de toute espèce de travaux du ressort de l'architecture et du génie civil et militaire, terminé par une analyse et série de prix avec détails sur la nature, la qualité, la façon et la mise en œuvre des matériaux, par E. SERGENT. 8e édition, 2 volumes grand in-8° et 1 atlas de 47 planches in-folio . . . . 50 fr.

Géométrie descriptive.

Cours de géométrie descriptive. Perspectives, ombres, courbes et surfaces, charpente. Professé à l'Ecole centrale des arts et manufactures, par Ch. BRISSE, rédigé et annoté par H. PICQUET, examinateur d'admission et répétiteur de géométrie descriptive à l'Ecole Polytechnique. 1 volume grand in-8°, avec 300 figures dans le texte . . . . 17 fr. 50

Coupe des pierres.

Traité pratique de la coupe des pierres, précédé de toute la partie de la géométrie descriptive qui trouve son application dans la coupe des pierres, par LEJEUNE. 1 volume in-8° et 1 atlas in-4° de 59 planches, contenant 381 figures . . . . 40 fr.

Coupe des pierres.

Coupe des pierres, précédée des principes du trait de stéréotomie, par Eugène ROUCHÉ, examinateur de sortie à l'Ecole Polytechnique, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, et Charles BRISSE, professeur à l'Ecole centrale et à l'Ecole des Beaux-Arts, répétiteur à l'Ecole Polytechnique. 1 volume grand in-8° et 1 atlas in-4° de 33 planches. . . . 25 fr.

Matériaux de construction.

Connaissance, recherche et essais des matériaux de construction et de ballastage, par Em. BAUDSON, chef de section des travaux neufs au chemin de fer du Nord. 1 volume grand in-8°. . . . . 6 fr.

Chimie appliquée à l'art de l'ingénieur.

Chimie appliquée à l'art de l'ingénieur. *Première partie :* Analyse chimique des matériaux de construction, par Ch.-Léon DURAND-CLAYE, inspecteur général, ancien professeur et ancien directeur du Laboratoire à l'Ecole des ponts et chaussées, et DERÔME, chimiste de ce Laboratoire. *Deuxième partie* : Etude spéciale des matériaux d'agrégation, par René FERET, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, chef du Laboratoire des ponts et chaussées à Boulogne-sur-Mer. 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses gravures dans le texte . . . . 15 fr.

Ciments et chaux hydrauliques.

Ciments et chaux hydrauliques. Fabrication, propriétés, emploi, par E. CANDLOT, 2e édition revue et considérablement augmentée. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte, relié. . . . . 15 fr.

Constructions en ciment armé.

Etude des divers systèmes de constructions en ciment armé. Historique, examen des divers systèmes, applications, calculs des pièces, exemples, par Gérard LAVERGNE, ingénieur civil des mines, ancien élève de l'Ecole Polytechnique. 1 volume in-8°, avec figures dans le texte, relié 3 fr. 50

Chaux et sels de chaux.

Chaux et sels de chaux appliqués à l'art de l'ingénieur, par GRANGE, agent voyer en chef du département de la Vienne. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte. . . . . 18 fr.

Carrières de pierre de taille.

Recherches statistiques et expériences sur les matériaux de construction. Répertoire des carrières de pierre de taille exploitées en 1889, publié par le MINISTÈRE DES TRAVAUX PUBLICS et contenant pour chaque carrière : sa désignation et le nom de la commune où elle est située, le mode d'exploitation, le nombre et la hauteur des bancs, la désignation usuelle de la pierre, la nature de la pierre, la position géologique de la carrière, le poids moyen par mètre cube et la résistance à l'écrasement par centimètre carré des échantillons essayés. 1 volume in-4°. . . . . 10 fr.

Murs de soutènement.

Etudes théoriques et pratiques sur les murs de soutènement et les ponts et viaducs en maçonnerie, par DUBOSQUE, sous-ingénieur des ponts et chaussées, ancien chef de bureau des travaux neufs à la Compagnie du Nord. 5e édition, revue, corrigée et augmentée. 1 volume grand in-8°, avec 15 planches et 141 figures, relié . . . . 15 fr.

Murs de soutènement.

Tracé du profil des murs de soutènement et de pilastres de portes, par Eugène JOYEUX, architecte. 1 volume grand in-8°, avec 56 figures dans le texte, relié. . . . . 5 fr.

Consolidation des talus.

Traité de consolidation des talus, routes, canaux et chemins de fer, par R. BRUÈRE, ingénieur civil. 1 volume in-12 et atlas in-8° de 25 planches doubles. . . . . 10 fr.

Statique graphique.

Eléments de statique graphique, par Eugène ROUCHÉ, examinateur de sortie à l'Ecole Polytechnique, professeur de statique graphique au Conservatoire des arts et métiers. 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses gravures dans le texte. 12 fr. 50

Statique graphique.

Application de la statique graphique. Règlements ministériels, charges des ponts et des charpentes, poutres droites, poutres courbes, pleines, à treillis, continues, ponts-grues, arcs métalliques, fermes métalliques, piles métalliques, influence du vent sur les constructions, leurs déformations, calcul des poutres pour le lançage et le montage, piles en maçonnerie, calcul des joints des poutres, formules et tables usuelles, par Maurice KŒCHLIN, administrateur de la Société de Construction de Levallois-Perret. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte et un atlas de 34 planches. . . . . 30 fr.

Statique graphique.

Eléments de statique graphique appliquée aux constructions. 1re *partie.* Poutres droites, poussée des terres, voûtes, par MULLER-BRESLAU (traduction par SEYRIG). 2e *partie :* Poutres continues, applications numériques par SEYRIG, ingénieur-constructeur du pont du Douro. 1 volume grand in-8° et 1 atlas in-4° de 29 planches en 3 couleurs. . . . . 20 fr.

Statique graphique.

Traité de statique graphique appliquée aux constructions, toitures, planchers, poutres, ponts, etc. — Eléments du calcul graphique; des forces et de leur résultante, des moments fléchissants, des efforts tranchants, recherche des maxima, charge permanente, surcharge uniformément répartie, surcharge mobile, données pratiques sur le poids propre des toitures et sur leur surcharge accidentelle, poutres pleines, poutres a treillis simples et multiples, centre de gravité, moment d'inertie, exemples et applications, par Maurice Maurer, 2e édition. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte, et 1 atlas de 20 planches in-4°. . .. 12 fr. 50

Statique graphique.

Eléments de statique graphique appliquée à l'équilibre des systèmes articulés, par Arthur Thiré, ancien élève de l'Ecole Polytechnique. 1 vol. grand in-8° et 1 atlas in-4° de 18 planches. . . . . 10 fr.

Cours de mathématiques.

Cours de mathématiques pures et appliquées, à l'usage des conducteurs des ponts et chaussées, agents voyers, chefs de section, architectes, conducteurs de travaux, entrepreneurs, etc., comprenant : *Arithmétique*, nombres entiers, fractions et nombres fractionnaires, progression, séries et logarithmes, applications. *Géométrie plane :* propriétés et tracé des figures planes, mesure et proportion des figures planes, trigonométrie, courbes diverses. *Géométrie de l'espace :* propriétés et construction des figures de l'espace, mesure des figures de l'espace, géométrie descriptive, perspective. *Algèbre, analyse et géométrie analytique. Mécanique :* statique, dynamique, hydrostatique, hydrodynamique, par L. Lancelin, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte, relié . . . . 10 fr.

Résumé des connaissances mathématiques.

Résumé des connaissances mathématiques nécessaires dans la pratique des travaux publics et de la construction, par E. Mussat, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec 133 figures dans le texte . . . . 10 fr.

Voirie. — De l'alignement.

De l'alignement ou du régime des propriétés privées bordant le domaine public, par C. Morin. 1 volume grand in-8°. . . . . 15 fr.

Traité de topographie.

Traité de topographie. — Appareils d'optique, applications de la géodésie à la topographie, instruments de mesure, levé des plans de surface, levés souterrains, théorie des erreurs, par André Pelletan, ingénieur en chef des mines, professeur à l'Ecole des mines. 1 volume grand in-8°, avec 235 figures dans le texte, relié. . . . . 15 fr.

Cours de topographie.

Cours de topographie. Lever des plans de surface et des plans de mines, par Alfred Habets, ingénieur honoraire des mines, professeur à l'Université de Liège. 4e édition, revue et augmentée. 1 volume grand in-8°, avec 107 figures dans le texte. . . . . 8 fr.

Levé des plans et nivellement.

Levé des plans et nivellement. Opérations sur le terrain, opérations souterraines, nivellement de haute précision, par Léon Durand-Claye, ingénieur en chef des ponts et chaussées, Pelletan et Lallemand, ingénieurs des mines, 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte. 25 fr.

Nivellement général de la France.

Instructions pour les opérations sur le terrain préparées par le Comité de nivellement, et publiées par le ministère des Travaux publics. 1 volume in-8° . . . . 5 fr.

Levé des plans.

Traité du levé des plans et de l'arpentage, par Duplessis. 1 volume in-8, avec 105 figures dans le texte. . . . . 4 fr.

Nivellement.

Traité du nivellement, comprenant les principes généraux, la description et l'usage des instruments, les opérations et les applications, par Duplessis. 1 volume in-8°, contenant 112 figures. . . . . 8 fr.

Nivellements de précision.

Etudes sur les méthodes et les instruments de nivellements de précision, par C.-M. Goulier, colonel du génie en retraite, revues, annotées et accompagnées d'une étude sur les variations de longueur des mires, d'après les expériences du colonel Goulier, par Charles Lallemand, ingénieur en chef des mines, directeur du service du nivellement général de la France. 1 volume in-4°, avec 2 planches. . . . . 20 fr.

Tables tachéométriques.

Tables tachéométriques, donnant aussi rapidement que la règle logarithmique tous les calculs nécessaires à l'emploi du tachéomètre, par Louis Pons, ingénieur d'études de chemins de fer. 1 volume in-4°, relié . . . . 10 fr.

Tachéométrie.

Manuel de l'opérateur au tachéomètre, suivi d'une note sur l'emploi de l'instrument dans l'application des tracés, par Henri Bonnami, conducteur des ponts et chaussées. 1 volume in-8°, avec figures dans le texte. 3 fr.

Tachéométrie.

Suppression du chaînage, des règles à calcul, des tables tachéométriques et des tables logarithmiques dans le nivellement et le levé des plans, méthode donnant simultanément la configuration et le relief des terrains de toute étendue par la lecture directe des distances horizontales, des différences de niveau et des coordonnées rectangulaires des points visés par rapport à l'orientation de chaque station, par Loir Erasme, agent voyer, 3e édition. 1 volume in-8°, avec 3 planches . . . . 5 fr.

Courbes de raccordement.

Tables pour le tracé des courbes circulaires de raccordement des voies de communication, par Charles Grimmeisen, ancien ingénieur. 1 volume in-12, avec figures dans le texte, relié. . . . . 9 fr.

Courbes de raccordement.

Tracé des courbes sans aucun chaînage de cordes ni d'ordonnées et levé des profils en travers sans niveau, par Loir Erasme, 3e édition. 1 brochure in-8°, avec 1 planche. . . . . 1 fr.

Calcul des raccordements paraboliques.

Calculs des raccordements paraboliques dans les tracés de chemins de fer comprenant de nombreuses tables numériques et la théorie complète des courbes à considérer en plan et en profil, par Maximilien de Leber, inspecteur au corps I. R. du contrôle des chemins de fer, avec une introduction, par Charles Bricka, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte et planches, relié . . . . 23 fr.

Courbes de raccordement.

Nouvelles tables pour le tracé des courbes de raccordement en arc de cercle (chemins de fer, canaux, routes et chemins), par Chauvac de la Place. 5e édition. 1 volume in-12, relié. . . . . 7 fr. 50

Mouvement des terres.

Théorie et pratique du mouvement des terres d'après le procédé Bruckner, par Ernest Henry, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° . . . . 2 fr. 50

Construction des chemins de fer.

Instructions pour la préparation des projets et la surveillance des travaux de construction de la plate-forme des chemins de fer, suivies de tables pour le calcul des courbes et pour l'évaluation des volumes des déblais et des remblais, par L. Partiot, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume petit in-4°, avec 8 planches et de nombreuses figures intercalées dans le texte, relié. . . . . 15 fr.

Tracé des chemins de fer.

Tracé des chemins de fer, routes, canaux, tramways, etc. Etudes préliminaires, études définitives, — recherche et choix des matériaux de construction et de ballastage, par Em. Baudson, chef de section des travaux neufs au chemin de fer du Nord. 1 volume grand in-8°, avec 4 planches et 95 figures intercalées dans le texte. . . . . 10 fr.

Cours de routes.

Cours de routes professé à l'école des Ponts et Chaussées. Disposition d'une route, étude et rédaction des projets, construction, entretien, par Ch.-Léon Durand-Claye, inspecteur général des ponts et chaussées. 1 volume in-8°, avec figures dans le texte. . . . . 20 fr.

Routes nationales.

Etat itinéraire des routes nationales de la France et de l'Algérie, publié par le ministère des Travaux publics. 1 volume in-4°, 1 atlas de 90 cartes départementales et une grande carte générale mesurant 85 centimètres sur 95 centimètres . . . . 20 fr.

Chemins vicinaux.

Traité pratique des chemins vicinaux. Généralités, personnel, assiette des chemins vicinaux, ressources de la voirie vicinale, exécution des travaux, comptabilité des chemins vicinaux, police de la voirie vicinale, police de roulage, objets divers, par Ernest Henry, inspecteur général des ponts et chaussées, ancien agent voyer en chef du département de la Marne. 1 volume grand in-8° . . . . 20 fr.

Réparation et entretien des chaussées.

Réparation et entretien des chaussées en empierrement. Instructions pratiques à l'usage des ingénieurs, conducteurs, commis et agents-voyers et plus spécialement à celui des cantonniers, par J. Dubosque, sous-ingénieur des ponts et chaussées. Ouvrage approuvé par le Ministre des Travaux publics, 2e édition revue et mise à jour. 1 volume in-12 cartonné. . . . . 1 fr. 50

Pavage en bois.

Le bois et ses applications au pavage à Paris, en France et à l'étranger. Divers systèmes de pavage en bois; bois employé au pavage; étude des propriétés physiques, mécaniques, anatomiques et chimiques des bois; conservation et préparation des bois; fabrication des pavés; entretien et durée des pavages en bois; pavage en bois dans les voies à tramways; régime des sociétés de pavage en bois; contrats et cahiers des charges; fonctionnement du système de la régie, à Paris; prix de revient, par Albert Petsche, ingénieur des ponts et chaussées, ancien ingénieur du service municipal de Paris. 1 volume in-8°, avec 223 figures dans le texte, relié . . . . 20 fr.

Traité complet des Chemins de fer.

Traité complet des chemins de fer. Historique et organisation financière, construction de la plate-forme ouvrages d'art, voie, stations.

signaux, matériel roulant, traction, exploitation, chemins de fer à voie étroite, tramways, par G. HUMBERT, ingénieur des ponts et chaussées. 3 volumes grand in-8°, avec 700 figures dans le texte. . . . . . 50 fr.

Chemins de fer. Notions générales et économiques.

Chemins de fer. Notions générales et économiques. Historique, formalités et règlements relatifs à l'exécution des travaux, régimes, développements, dépenses, comparaison des voies ferrées avec les routes et les voies de navigation intérieure, prix de revient des transports sur rails, tarifs et leur application, recettes d'exploitation, voie et traction, chemins de fer à voie étroite, considérations économiques, par Léon LEYGUE, ancien ingénieur des ponts et chaussées, ingénieur civil. 1 volume grand in-8° . . . . 15 fr.

Chemins de fer, — Superstructure.

Chemins de fer. Superstructure : voie, gares et stations, signaux, par E. DEHARME, ingénieur du service central de la Compagnie du Midi, professeur du cours de Chemins de fer à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. 1 volume grand in-8°, avec 310 figures dans le texte et 1 atlas in-4° de 73 planches doubles . . . . 50 fr.

Chemins de fer d'intérêt local.

Traité des chemins de fer d'intérêt local. Chemins de fer à voie étroite, tramways, chemins de fer à crémaillère et funiculaires, par G. HUMBERT, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec 212 figures dans le texte. Relié. . . . . 20 fr.

Chemins de fer à voie de 0,60 centimètres.

Construction et exploitation des chemins de fer à voie de 0,60 centimètres. Voie, terrassements, ouvrages d'art, machines et matériel roulant, avec étude d'un tracé entre deux points donnés, par R. TARTARY, conducteur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec 97 figures dans le texte. . . . . 10 fr.

Chemins de fer d'intérêt local et Tramways.

Chemins de fer d'interêt local et tramways établis sous le régime de la loi du 11 juin 1880. Résumé des résultats obtenus et critique des différents systèmes employés, par H. HEUDE, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 vol. in-8° . . . . 3 fr. 50

Chemins de fer funiculaires. — Transports aériens.

Chemins de fer funiculaires. Transports aériens, par A. LÉVY-LAMBERT, ingénieur civil. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte. 15 fr.

Chemins de fer à crémaillère.

Chemins de fer à crémaillère, par A. LÉVY-LAMBERT, ingénieur civil. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte. . . . . 15 fr.

Tramways.

Tramway à vapeur à voie de 0m,60, de Pithiviers à Toury. — I. Description du tracé, du matériel fixe et du matériel roulant, détail des dépenses, par F. LIÉVIN, ingénieur des ponts et chaussées. — II. Examen critique des résultats obtenus, par H. HEUDE, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec une planche. . . . . 2 fr. 50

Tramways.

De la traction économique pour tramways urbains et régionaux, par W. R. ROWAN, ingénieur civil. 1 volume in-4°, avec 29 figures dans le texte. . . . . 4 fr.

Traction mécanique des tramways.

La traction mécanique des tramways. Etude des différents systèmes : comparaison et prix de revient, par Raymond GODFERNAUX, ingénieur des

arts et manufactures, attaché à l'exploitation du chemin de fer du Nord et à la direction de diverses compagnies de chemins de fer d'intérêt local. 1 volume grand in-8°, avec 182 figures dans le texte, relié . . . . 20 fr.

Tramways à air comprimé.

L'air comprimé appliqué à la traction des tramways. Description de la locomotive, compresseurs, chargement de voitures et canalisation, divers modes de transport par l'air comprimé, prix de revient et conclusions, par L. A. Barbet. 1 volume grand in-8°, avec 96 figures dans le texte. 7 fr. 50

Tramways électriques.

Les tramways électriques. Dispositions générales; voie; tramways à conducteurs aériens, souterrains, établis au niveau du sol; tramways à accumulateurs; matériel roulant; stations centrales; dépenses, par Henri Maréchal, ingénieur des ponts et chaussées, ingénieur de la 1re section des Travaux de Paris et du Secteur municipal d'électricité. 1 volume in-8°, avec 118 figures dans le texte, relié. . . . . 7 fr. 50

Traction électrique.

La traction électrique sur voies ferrées. Voie, matériel roulant, traction, par André Blondel, ingénieur des ponts et chaussées, professeur du cours d'électricité à l'Ecole des ponts et chaussées et F. Paul Dubois, ingénieur des ponts et chaussées, ingénieur du service municipal de la Ville de Paris. 2 volumes grand in-8°, contenant plus de 1700 pages et 1014 figures dans le texte, reliés. . . . . 50 fr.

Moyens de transport.

Les moyens de transport appliqués dans les mines, les usines et les travaux publics; voitures, tramways, chemins de fer, plans inclinés, trainage par câble et par chaîne, etc., organisation et matériel, par Evrard. 2 volumes in-8°, avec 1 atlas de 123 planches in-folio, contenant 1400 figures . . . . 100 fr.

Tarifs de chemins de fer.

Traité général des tarifs de chemins de fer, contenant une étude spéciale des tarifs appliqués en Allemagne, Autriche-Hongrie, Suisse, Italie, France, Belgique, Hollande, Angleterre et Russie, par F. Ulrich, conseiller intime au ministère des Travaux publics de Berlin. Edition française revue et augmentée par l'auteur. 1 volume grand in-8°. . . . . 16 fr.

Carnet du poseur de voies.

Carnet du poseur de voies de chemins de fer, par P. Martial, chef de section au chemin de fer de l'Etat. 1 volume in-12, avec 35 planches. . . . . 3 fr. 50

Block-System à distance.

Etude sur le Block-System à distance pour l'exploitation des chemins de fer. Contrôleur automatique de la marche des trains. Contrôleur des cloches électriques. Contrôleur automatique des signaux du Block-System à distance, par Ch. Metzger, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume in-4°, avec figures en couleur et 5 planches. . . . . . 6 fr.

Chemin de fer métropolitain de Berlin.

Le chemin de fer métropolitain de Berlin, par Gaudin et Zuber. 1 volume grand in-8°, avec 10 planches, 36 figures dans le texte et 1 plan en couleur. . . . . 6 fr.

Montagnes et Torrents.

Restauration des montagnes, correction des torrents, reboisement, par E. Thiery, professeur à l'Ecole nationale forestière, avec une introduction par M. C. Lechalas. 1 volume grand in-8°, avec 164 figures dans le texte. 15 fr.

Hydraulique agricole.

Hydraulique agricole. Aménagement des eaux; irrigation des terres labourables, des cultures maraîchères, des jardins, des prairies, etc.; création et entretien des prairies; desséchements, dessalage, limonage et colmatage, curage; irrigation et drainage combinés; renseignements complémentaires techniques et administratifs, par J. Charpentier de Cossigny, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, lauréat de la Société des Agriculteurs de France, ingénieur civil. 2e édition revue et augmentée. 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte. 15 fr.

Navigation intérieure.

Guide officiel de la navigation intérieure avec itinéraires graphiques des principales lignes de navigation et carte générale des voies navigables de la France, dressé par les soins du Ministère des Travaux Publics. Documents réglementaires, nomenclature alphabétique et conditions de navigabilité, notices et tableaux des distances, itinéraires des principales lignes de navigation, itinéraires graphiques, carte au 1/500 000e. 5e édition revue et augmentée. 1 volume in-18 jésus, avec 3 planches en couleur et une carte en couleur de 0m,70 sur 0m,65.

Prix : le volume broché et la carte en feuille . . . . 2 fr. 25

Le volume solidement relié et la carte montée sur toile, pliée et reliée comme le volume. . . . . 5 fr.

Navigation intérieure.

Cours de navigation intérieure de l'Ecole nationale des ponts et chaussées. Rivières à courant libre. Introduction, état naturel des cours d'eau, opérations et observations pour l'étude des cours d'eau et de leur régime, matériel et procédés de la navigation fluviale, premières améliorations, travaux contre les inondations, régularisation des fleuves et rivières, exploitation, annexes, par F.-B. de Mas, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur à l'Ecole nationale des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte . . . . 17 fr. 50

Rivières et Canaux.

Navigation intérieure. Rivières et canaux, par Guillemain, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur à l'Ecole des ponts et chaussées. 2 volumes grand in-8°, avec gravures dans le texte . . . . 40 fr.

Atlas des lacs français.

Atlas des lacs français, publié sous les auspices du ministère des Travaux publics, par A. Delebecque, ingénieur des ponts et chaussées. 1 album contenant 11 cartes hydrographiques, avec courbes de niveau et teintes. Prix en carton. . . . . 15 fr.

Travaux maritimes.

Travaux maritimes; phénomènes marins; accès des ports. Mouvements de la mer. — Régime des côtes. — Matériaux dans l'eau de mer. — Atterrage. Entrée des ports. Jetées, par Laroche, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'Ecole des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8° et 1 atlas in-4° de 46 planches doubles. . . . . 40 fr.

Ports maritimes.

Ports maritimes. Ports d'échouage. — Bassins à flot. — Ecluses des bassins à flot. — Portes d'écluses. — Ponts mobiles. — Moyens d'obtenir et d'entretenir la profondeur à l'entrée des ports. — Moyens d'obtenir et d'entretenir la profondeur dans les ports. Ouvrages et appareils pour la réparation des navires. Défense des côtes. Eclairage et balisage des côtes. Exploitation des ports. Canaux maritimes, par F. Laroche, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur à l'Ecole nationale des ponts et chaussées. 2 volumes grand in-8°, avec figures dans le texte, et 2 atlas in-4° contenant 37 planches doubles . . . . 50 fr.

Cours de ponts.

Cours de Ponts de l'Ecole des ponts et chaussées. Emplacements, débouchés, fondations, ponts en maçonnerie, par Jean Résal, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte. . . . . 14 fr.

Ponts en maçonnerie.

Ponts en maçonnerie, par E. Degrand, inspecteur général des ponts et chaussées, et J. Résal, ingénieur des ponts et chaussées. 2 volumes grand in-8°, avec de nombreuses gravures dans le texte . . . . 40 fr.

Barême des poutres métalliques.

Barême des poutres métalliques à âmes pleines et à treillis, par Pascal, ingénieur civil. 1 volume in-4°, avec figures dans le texte. Relié. 12 fr. 50

Constructions métalliques.

Constructions métalliques. — Elasticité et résistance des matériaux : fonte, fer et acier, par Jean Résal, ingénieur des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte. . . . . 20 fr.

Ponts métalliques.

Traité pratique des ponts métalliques ; calcul des poutres et des ponts par la méthode ordinaire et par la statique graphique, par M. Pascal, ingénieur ancien élève de l'Ecole d'arts et métiers d'Aix. 1 volume grand in-8° et 1 atlas de 12 planches. 12 fr.

Ponts métalliques.

Ponts métalliques, par Jean Résal, ingénieur des ponts et chaussées.

Tome premier. — Calcul des pièces prismatiques; renseignements pratiques ; formules usuelles ; poutres droites à travées indépendantes ; ponts suspendus; ponts en arc. 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses gravures dans le texte. . . . . 20 fr.

Tome second. — Poutres à travées solidaires : Théorie générale des poutres à section constante; calcul des poutres symétriques ; poutres continues à section variable; théorie générale des poutres de hauteur variable; montage des ponts par encorbellement ; ponts-grues ; calcul des systèmes articulés; piles métalliques; tables numériques. 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses gravures dans le texte. . . . . 20 fr.

Ponts métalliques.

Calcul des ponts métalliques à poutres droites, à une ou plusieurs travées par la méthode des lignes d'influence. Formules et tables servant au calcul rapide des moments fléchissants et des efforts tranchants maximums déterminés, en divers points des poutres, par des charges uniformément réparties et des charges concentrées mobiles, par Adrien Cart et Léon Portes, ingénieurs civils attachés au service des ponts métalliques de la Compagnie d'Orléans. 1 volume grand in-8°, avec figures dans le texte et 2 planches, relié . . . . 20 fr.

Ponts et viaducs métalliques.

Calculs de résistance des ponts et viaducs métalliques à poutres droites, d'après la circulaire ministérielle du 29 août 1891, par Maurice Hulewicz, ingénieur, ancien élève de l'Ecole des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec 1 planche . . . . 10 fr.

Ponts métalliques.

Études théoriques et pratiques sur les ponts métalliques à une travée et à poutres droites et pleines, par E. Dumetz, commis des ponts et chaussées, attaché au service vicinal du Pas-de-Calais. 1 volume grand in-8°, avec 117 figures dans le texte. 10 fr.

Ponts métalliques.

Ponts métalliques à travées continues. Méthode de calcul satisfaisant aux nouvelles prescriptions du règlement ministériel du 29 août 1891, avec tables numériques pour en faciliter l'emploi, par Bertrand DE FONTVIOLANT, ingénieur de la Compagnie de Fives-Lille, répétiteur de mécanique appliquée à l'Ecole centrale. 1 vol. grand in-8°, avec 3 planches . . . 10 fr.

Arches surbaissées en maçonnerie.

Tables et graphiques pour le calcul des arches surbaissées en maçonnerie, d'après la méthode de M. Tourtay, ingénieur des ponts et chaussées, par N. DE TEDESCO, ingénieur civil. 1 volume in-4°, avec 25 planches. 7 fr. 50

Arche biaise.

Mémoire sur l'appareil de l'arche biaise, par DE LA GOURNERIE. Ce mémoire a paru dans le n° 35 des *Annales du Conservatoire des arts et métiers*. Prix du numéro . . . . 5 fr.

Emploi des pieux métalliques.

Étude sur l'emploi des pieux métalliques dans les fondations d'ouvrages d'art, par C. GRANGE, agent voyer en chef du département de la Vienne, 1 volume grand in-8°, avec 51 figures dans le texte. . . . . . . 7 fr. 50

Stabilité des constructions.

Traité de stabilité des constructions, précédé d'éléments de statique graphique et suivi de compléments de mathématiques. Leçons professées au Conservatoire national des Arts et Métiers et à l'Ecole centrale d'Architecture, par Jules PILLET, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, à l'École nationale des Beaux-Arts, etc. 1 volume grand in-4° de 536 pages, imprimé sur très beau papier. Nombreux tableaux graphiques ; abaques et tables numériques; 600 figures et épures dans le texte. 25 fr.

Résistance des matériaux.

Résistance des matériaux. Cours de l'école des ponts et chaussées, par Jean RÉSAL, ingénieur en chef des ponts et chaussées. 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte. . . . . 16 fr.

Résistance des matériaux.

Stabilité des constructions et résistance des matériaux, par A. FLAMANT, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École des ponts et chaussées et à l'École centrale. 2e édition revue et augmentée. 1 volume grand in-8°, avec 251 figures dans le texte. . . . . 25 fr.

Ligne élastique.

La ligne élastique et son application à la poutre continue traitée par la statique graphique, par W. RITTER, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich. Traduit sur la 2e édition allemande, par M. KOECHLIN. 1 volume in-8°, avec 12 figures et 1 planche hors texte . . . . 5 fr.

Moments d'inertie.

Carnet du constructeur. Recueil de moments d'inertie relatif à 3263 poutres composées à âme simple et double d'une hauteur variant de 20 centimètres à 1 mètre, par CHEVALIER et BRUN, ingénieurs-constructeurs. 1 volume in-12. Relié . . . . 7 fr. 50

Serrurerie et Constructions en fer.

Traité pratique de serrurerie. Constructions en fer et serrurerie d'art. — Planchers en fer, linteaux, filets, poutres ordinaires et armées. — Colonnes en fonte, consoles en fonte, colonnes en fer creux, pans de fer, montants en fer composés. — Charpentes en fer, combles, hangars, marchés couverts. — Passerelles et petits ponts. — Escaliers en fer. — Châs-

sis de couche, bâches, serres, jardins d'hiver, chauffage, vitrerie. — Volières, tonnelles, kiosques. — Auvents, marquises, verandahs, bow-windows. — Grilles, panneaux de portes, rampes. — Eléments divers de serrurerie et de ferronnerie d'art. — Principaux assemblages employés en serrurerie, etc., etc., par E. Barberot, 2e édition. 1 volume grand in-8°, avec 972 figures dans le texte . . . . 25 fr.

Charpentes métalliques.

Les principes de la construction des charpentes métalliques et leur application aux ponts à poutres droites, combles, supports et chevalements. Extraits du cours *d'architecture industrielle* professé à l'Ecole spéciale des arts et manufactures et des mines annexée à l'Université de Liège par Henri Dechamps, professeur à la Faculté des sciences de Liège, ancien ingénieur de la Société Cockerill, à Seraing, 2e édition refondue et augmentée. 1 volume grand in-8°, avec 344 figures dans le texte. Relié, 15 fr.

Escaliers.

Traité complet et pratique de la construction des escaliers en charpente et en pierre, par Aubineau, dit Poitevin la Fidelité. 1 atlas in-folio de 30 planches et 1 volume de texte in-18 . . . . 12 fr.

Eléments des prix de construction.

Recueil d'éléments des prix de construction. Chargements, transports, terrassements, maçonneries, carrelages, pavages, charpente en bois, couvertures, plomberie, zincage et canalisation, menuiserie, serrurerie et charpente métallique, plâtrerie, vitrerie, peinture, tenture et dorure, par A. Mégrot, conducteur des ponts et chaussées, chef de section des chemins de fer. 1 volume in-12, broché, 7 fr. ; relié . . . . 8 fr.

Série de prix.

Série de prix des travaux de construction executés en 1889 dans Paris et le département de la Seine, publiée sous la direction de A. Mégrot. 1re partie : Maçonnerie et terrasse. 1 volume petit in-folio, broché, 5 fr. ; relié . . . . 7 fr.

Chauffage et ventilation

Traité pratique du chauffage et de la ventilation. Principes, appareils, installations : cheminées, poêles, calorifères, chauffages à air chaud et à vapeur. Chauffage et ventilation des maisons particulières, églises, écoles, lycées, banques, magasins, établissements publics, théâtres, hôpitaux, casernes, serres, bains, amphithéâtres, par Ph. Picard, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume grand in-8°, avec 506 figures dans le texte, relié. . . . . 20 fr.

Chauffage et ventilation.

Fumisterie, chauffage et ventilation, par J. Denfer, architecte, professeur du cours d'architecture et de construction civile à l'Ecole centrale. 1 volume grand in-8°, avec 375 figures dans le texte. . . . . . 25 fr.

Plomberie.

Plomberie, eau, assainissement et gaz. Tuyauteries, appareils d'arrêt et de puisage, prises d'eau, pompes, compteurs. canalisation, réservoirs d'eau, appareils utilisateurs d'eau et leurs décharges, canalisations des eaux résiduaires d'une propriété, gaz, canalisations et accessoires, compteurs et régulateurs, brûleurs et appareils, par J. Denfer, architecte, professeur à l'Ecole Centrale. 1 volume grand in 8°, avec 391 figures dans le texte. . . . . 20 fr.

Distribution d'eau. — Assainissement.

Salubrité urbaine, distribution d'eau et assainissement, par G. Bechmann ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef du service technique de l'assainissement de Paris, professeur à l'Ecole nationale des ponts et

chaussées. 2e édition revue et très augmentée. *Tome premier.* 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte . . . . . . 20 fr.
Cette deuxième édition formera deux volumes à 20 fr. chacun.

Société des Ingénieurs et Architectes sanitaires de France.

Bulletin de la *Société des Ingénieurs et Architectes sanitaires de France.* Publication mensuelle.
Abonnements : France, 10 fr. — Etranger, 12 fr.

Hygiène générale et industrielle.

Hygiène générale et hygiène industrielle, ouvrage rédigé conformément au programme du cours d'hygiène industrielle de l'Ecole centrale, par le Dr Léon Duchesne, ancien interne des hôpitaux de Paris, ancien président de la Société de médecine pratique de Paris. 1 volume grand in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte. . . . . 15 fr.

Congrès d'assainissement.

Premier congrès d'assainissement et de salubrité (Paris, 1895). Compte rendu des travaux publiés par le soin du secrétaire général E. d'Esménard, ingénieur civil, fondateur de la Société des ingénieurs et architectes sanitaires de France. 1 volume grand in-8°, avec 67 figures dans le texte et 4 planches . . . . 12 fr. 50

Construction des égouts.

Traité pratique de la construction des égouts. Leurs dispositions, procédés employés pour leur construction, métrage des travaux, application des prix, par Jules Hervieu, conducteur des ponts et chaussées, chef de circonscription au service municipal des travaux de Paris, Précédé d'une préface par Raynald Legouëz, idgénieur des ponts et chaussées, chargé du service des égouts de Paris. 1 volume grand in-8°, avec 278 figures dans le texte, relié . . . . 20 fr.

Législation du bâtiment.

Traité pratique de la législation des bâtiments et des usines. Voirie, mitoyenneté, clôtures, servitudes, assainissement, propriété, bornage, vente d'immeubles, contributions, location, réparations locatives, concours publics, honoraires, législation, jurisprudence, usages locaux, etc., etc., à l'usage des architectes, des ingénieurs, des entrepreneurs, des conducteurs des ponts et chaussées, des agents voyers, des propriétaires et des locataires, par E. Barberot, architecte. 1 volume in-8°, contenant plus de 1500 pages, avec de nombreuses figures dans le texte, relié . . . 20 fr.

ARCHITECTURE

Traité d'architecture.

Traité d'architecture par L. Cloquet, architecte, ingénieur honoraire des ponts et chaussées, professeur à l'Université de Gand.
Tome I et II : *Eléments de l'Architecture.* 2 volumes grand in-8°, avec 2260 figures dans le texte . . . . 30 fr.
Tome III : *Hygiène, chauffage et ventilation,* 1 volume grand in-8°, avec 103 figures dans le texte . . . . 5 fr.
Les tomes IV (*Types d'édifices*) et V (*Esthétique, Composition et Pratique de l'architecture*) sont en préparation. Chacun de ces volumes traitant un sujet bien défini se vendra separément.

Histoire des styles d'architecture.

Histoire des styles d'architecture dans tous les pays, depuis les temps les plus anciens jusqu'à nos jours, par E. Barberot, architecte. 2 volumes grand in-8° jésus, avec 928 gravures dans le texte . . . . 40 fr.

Art architectural.

L'art architectural en France, depuis François Ier jusqu'à Louis XVI, par ROUYER, architecte, avec texte par Alfred DARCEL, directeur du Musée de Cluny. Motifs de décoration intérieure et extérieure, dessinés d'après les modèles exécutés et inédits des principales époques de la Renaissance comprenant : salons, chambres à coucher, vestibules cabinets de travail bibliothèques, lambris, plafonds, voûtes, cheminées, portes, fenêtres, fontaines, grilles, stalles, chaires à prêcher, tombeaux, vases, glaces, etc. 2 volumes grand in-4, contenant 200 planches et texte. . . . . . 200 fr.

Décorations intérieures.

Décorations intérieures de l'époque de la Renaissance (de François Ier à Louis XIII), boiseries, panneaux, meubles, relevés, mesurés, dessinés, avec cotes, échelles, profils et détails d'exécution, par Eugène ROUYER, architecte, auteur de l'Art architectural en France, etc. 1 volume in-folio contenant 100 planches et texte. 125 fr.

Architecture moderne.

L'architecture moderne en France. Plans, coupes, élévations, profils et détails de construction et d'ornementation comprenant, outre les plans et les façades des maisons une quantité énorme de détails de portes, fenêtres corniches, balcons, vestibules, chapiteaux, entablements, etc., par F. BARQUI, architecte. 1 volume in-folio, contenant 120 planches et texte. 100 fr.

ÉLECTRICITÉ

Traité d'électricité et de magnétisme.

Traité d'électricité et de magnétisme. Théorie et applications, instruments et méthodes de mesure électrique. Cours professé à l'école supérieure de télégraphie, par A. VASCHY, ingénieur des télégraphes, examinateur d'entrée à l'école Polytechnique. 2 volumes grand in-8°, avec de nembreuses figures dans le texte. . . . . 25 fr.

Théorie de l'électricité.

Théorie de l'électricité. Exposé des phénomènes électriques et magnétiques fondé uniquement sur l'expérience et le raisonnement, par A. VASCHY, ingénieur des télégraphes, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. 1 volume grand in-8°, avec 74 figures dans le texte, relié. 20 fr.

Traité pratique d'électricité.

Traité pratique d'électricité à l'usage des ingénieurs et constructeurs. Théorie mécanique du magnétisme et de l'électricité, mesures électriques, piles, accumulateurs et machines électrostatiques, machines dynamo-électriques génératrices, transport, distribution et transformation de l'énergie électrique, utilisation de l'énergie électrique, par Félix LUCAS, ingénieur en chef des ponts et chaussées, administrateur des chemins de fer de l'Etat. 1 volume grand in-8°, avec 278 figures dans le texte. 15 fr.

Electricité industrielle.

Traité d'électricité industrielle, théorique et pratique, par Marcel DEPREZ, membre de l'Institut, professeur d'électricité industrielle au Conservatoire national des arts et métiers, professeur suppléant au Collège de France. 2 volumes grand in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte, paraissant en 4 fascicules. Prix de souscription à l'ouvrage complet . . . . 40 fr.

Chaque fascicule se vend séparément . . . . 12 fr.

Électricité industrielle.

Traité pratique d'électricité industrielle. Unités et mesures ; piles et machines électriques ; éclairage electrique ; transmission électrique de l'énergie ; galvanoplastie et électro-métallurgie ; téléphonie, par E. Cadiat et L. Dubost, 5e édition. 1 volume grand in-8°. avec 277 gravures dans le texte, relié. . . . . 16 fr. 50

Manuel pratique de l'électricien.

Manuel pratique de l'électricien. Guide pour le montage et l'entretien des installations électriques, par E. Cadiat. 3e édition, 1 volume in-12, avec 243 figures dans le texte, relié . . . . 7 fr. 50

Aide-mémoire de poche de l'électricien.

Aide-mémoire de poche de l'électricien ; guide pratique à l'usage des ingénieurs, monteurs, amateurs électriciens, etc., par Ph. Picard et A. David, ingénieurs des arts et manufactures. 1 petit volume, format oblong de $0^{m},125 \times 0^{m},08$, relié en maroquin, tranches dorées . . 5 fr.

Contrôle des installations électriques.

Contrôle des installations électriques au point de vue de la sécurité. Le courant électrique, production et distribution de l'énergie, mesures, effets dangereux des courants, contrôle à l'usine, contrôle du réseau, des installations intérieures et des installations spéciales, résultats d'exploitation, règlements français et étrangers, par A. Monmerqué, ingénieur en chef des ponts et chaussées, ancien ingénieur des services de la première section des travaux de Paris et du Secteur municipal d'électricité, précédé d'une préface de M. Hippolyte Fontaine, président honoraire de la chambre syndicale des électriciens. 1 volume in-8°, avec de nombreuses figures dans le texte, relié . . . . 10 fr.

Pile électrique.

Traité élémentaire de la pile électrique, par Alfred Niaudet, 3e édition revue par Hippolyte Fontaine et suivie d'une notice sur les accumulateurs, par E. Hospitalier. 1 volume grand in-8°, avec gravures dans le texte. . . . . 7 fr. 50

Electrolyse.

Electrolyse ; renseignements pratiques sur le nickelage, le cuivrage, la dorure, l'argenture, l'affinage des métaux et le traitement des minerais au moyen de l'électricité, par Hippolyte Fontaine. 2e édition. 1 volume grand in-8°, avec gravures dans le texte, relié. . . . . 15 fr.

Machines dynamo-électriques.

Traité théorique et pratique des machines dynamo-électriques, par R.-V. Picou, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume grand in-8°, avec 198 figures dans le texte . . . . 12 fr. 50

Machines dynamo-électriques.

Traité théorique et pratique des machines dynamo-électriques, par Silvanus Thompson, traduit par E. Boistel, 2e édition. 1 volume grand in-8°, avec 558 gravures dans le texte. Relié . . . . 30 fr.

Machines dynamo-électriques,

La machine dynamo-électrique, par Frœlich, traduit de l'allemand par E. Boistel. 1 volume grand in-8°, avec 62 figures dans le texte. . 10 fr.

Constructions électro-mécaniques.

Constructions électro-mécaniques ; recueil d'exemples de construction et de calculs de machines dynamos et appareils électriques industriels, par Gisbert Kapp, traduit de l'allemand par A.-O. Dubsky et P. Girault, ingénieurs électriciens, 1 volume in-4°, avec 54 figures dans le texte et 25 planches, relié . . . . 30 fr.

Éclairage électrique.

Éclairage électrique de l'Exposition universelle de 1889. Monographie des travaux exécutés par le syndicat international des électriciens, par Hippolyte Fontaine, 1 volume in-4°, avec 29 planches tirées à part et 32 gravures dans le texte, relié . . . . 25 fr.

Éclairage électrique.

Manuel pratique d'éclairage électrique pour installations particulières, maisons d'habitation, usines, salles de réunion, etc., par Emile Cahen, ingénieur des ateliers de construction des manufactures de l'Etat. 2e édition. 1 volume in-12, avec de nombreuses figures dans le texte. Prix relié. . . . . 7 fr. 50

Éclairage électrique.

Étude pratique sur l'éclairage électrique des gares de chemins de fer, ports, usines, chantiers et établissements industriels par Georges Dumont, avec la collaboration de Gustave Baignières. 1 volume grand in-8, avec 2 planches . . . . 5 fr.

Eclairage à Paris.

L'éclairage à Paris. Etude technique des divers modes d'éclairage employés à Paris sur la voie publique, dans les promenades et jardins, dans les monuments, les gares, les théâtres, les grands magasins, etc., et dans les maisons particulières. — Gaz, électricité, pétrole, huile, etc.; usines et stations centrales, canalisations et appareils d'éclairage; organisation administrative et commerciale, rapports des compagnies avec la ville; traités et conventions; calcul de l'éclairement des voies publiques; prix de revient, par Henri Maréchal, ingénieur des ponts et chaussées et du service municipal de la ville de Paris. 1 volume grand in-8°, avec 221 figures dans le texte, relié . . . . 20 fr.

Electricité.

Manuel élémentaire d'électricité, par Fleeming Jenkin, professeur à l'Université d'Edimbourg, traduit de l'anglais par N. de Tedesco. 1 volume in-12, avec 32 gravures . . . . 2 fr.

Courants polyphasés.

Courants polyphasés et alterno-moteurs. Théorie, construction, mode de fonctionnement et qualités des générateurs et des moteurs à courants alternatifs et polyphasés, transformateurs polyphasés et mesure de la puissance dans les systèmes polyphasés, par Silvanus P, Thompson, directeur du collège technique de Finsbury, à Londres, traduction par E. Boistel, ingénieur-expert près le tribunal de la Seine. 1 volume grand in-8°, avec 173 figures dans le texte, relié . . . . 16 fr.

Courants alternatifs d'électricité.

Les courants alternatifs d'électricité, par T.-H. Blakesley, professeur au Royal Naval Collège de Greenwich, traduit de la 3e édition anglaise et augmenté d'un appendice, par W.-C. Rechniewski, 1 volume in-12, avec figures dans le texte, relié. 7 fr. 50

Transformateurs.

Les transformateurs à courants alternatifs simples et polyphasés. Théorie, construction, applications, par Gisbert Kapp, traduit de l'allemand par A.-O. Dubsky et G. Chenet, ingénieurs électriciens. 1 volume in-8°, avec 132 figures dans le texte, relié . . . . 12 fr.

Problèmes sur l'électricité.

Problèmes sur l'électricité. Recuéil gradué comprenant toutes les parties de la science électrique, par le Dr Robert Weber, professeur à l'Académie de Neuchâtel. 2e édition. 1 volume in-12, avec figures dans le texte 6 fr.

Accumulateur voltaïque.

Traité élémentaire de l'accumulateur voltaïque, par Emile REYNIER. 1 volume grand in-8°, avec 62 gravures dans le texte et un portrait de M. Gaston Planté. . . . . 6 fr.

Téléphone.

Le Téléphone, par William-Henri PREECE, électricien en chef du *British Post-Office*, et Jules MAIER, docteur ès sciences physiques. 1 volume grand in-8°, avec 290 gravures dans le texte. . . . . 15 fr.

Télégraphie électrique.

Traité de télégraphie électrique. — Production du courant électrique. — Organes de réception. — Premiers appareils. — Appareil Morse. — Appareils accessoires. — Installation des postes. — Propriétés électriques des lignes. — Lois de la propagation du courant. — Essais électriques, recherches des dérangements. — Appareils de translation, de décharge et de compensation. — Description des principaux appareils et des différents systèmes de transmission. — Etablissement des lignes aériennes. souterraines et sous-marines, par H. THOMAS, ingénieur des télégraphes. 1 volume grand in-8°, avec 702 figures dans le texte, relié. . . . . . 25 fr.

Télégraphie sous-marine.

Traité de télégraphie sous-marine. — Historique. — Composition et fabrication des câbles télégraphiques. — Immersion et réparation des câbles sous-marins. — Essais électriques. — Recherche des défauts. — Transmission des signaux. — Exploitation des lignes sous-marines, par WUNSCHENDORFF, ingénieur des télégraphes. 1 volume grand in-8°, avec 469 gravures dans le texte. . . . . 40 fr.

Tirage des mines par l'électricité.

Le tirage des mines par l'électricité, par Paul-F. CHALON, ingénieur des arts et manufactures. 1 volume in-18 jésus, avec 90 figures dans le texte, relié . . . . 7 fr. 50

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

Date Due

L. B. CAT. NO. 1137

